

# Resolución de problemas y juegos de estrategia con GeoGebra

Vázquez de la Torre Prieto, José María <sup>1</sup> [jmvazquezdelatorre@gmail.com](mailto:jmvazquezdelatorre@gmail.com)

## Resumen

Existen algunos problemas que son fáciles de resolver de forma geométrica y sin embargo de forma analítica presentan bastante dificultad.

Utilizaremos GeoGebra para resolver este tipo de problemas, además de elaborar de forma sencilla juegos de estrategia que favorezcan el razonamiento del alumnado.

Todo esto, integrando los applets de GeoGebra en unidades didácticas creadas con eXe y utilizando la pizarra digital.

## 1. Introducción

En este curso escolar 2010-2011 he tenido la suerte de tener una experiencia muy positiva utilizando GeoGebra con alumnado que está participando en el Máster Universitario en Profesorado de Enseñanza Secundaria y Bachillerato en la Universidad Pablo de Olavide en Sevilla.

La utilización de GeoGebra en las sesiones de trabajo nació de forma espontánea en cada uno de los módulos que he participado, tanto **en Resolución de Problemas** dentro de la asignatura de “Complementos para la Formación Disciplinar”, **Juegos Recreativos Matemáticos** dentro de la asignatura “Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas” y en la utilización didáctica de la **Pizarra Digital Interactiva (PDI)** en “Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa”.

El hecho de formar a futuros docentes de Matemáticas que ya desde las prácticas que están ahora mismo realizando en institutos de Secundaria van a encontrarse en las aulas (1º de ESO este año), a un alumnado con un portátil cada uno y una pizarra digital en el aula, hacía indispensable la utilización de las TIC y la PDI de forma didáctica en estas sesiones del Máster, y como parte fundamental, no podía faltar la utilización de GeoGebra para así poder aprovechar todo su potencial, además de innumerables recursos ya existentes elaborados por compañeros y compañeras que hacen que las matemáticas sean mucho más fáciles de aprender y enseñar.

Todo esto unido a la comodidad que supone, que el software de GeoGebra ya viene instalado por defecto en los portátiles del proyecto Escuela 2.0, con el sistema operativo de Guadalinux-Edu.

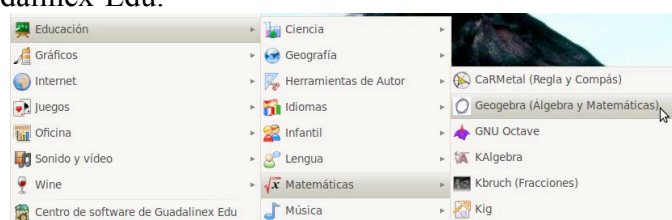


Imagen 1

<sup>1</sup> CEP de Castilleja de la Cuesta (Sevilla)

## 2. La plaza cuadrada

El primer día de clase planteo a los alumnos y alumnas del Máster un problema que días antes me había hecho llegar a través de la Web **Mates** y + (<http://www.matesymas.es>) un maestro de Bargas (Toledo), pidiéndome ayuda para resolverlo.

El enunciado del problema era el siguiente: “*Tres perros ciegos y flacuchos están sentados en tres esquinas de una plaza cuadrada. Un carnicero, coloca un chuletón en un punto de la plaza que dista respectivamente de cada una de las esquinas:*

*Izquierda-arriba: 48 metros. Izquierda-abajo: 36 metros. Derecha arriba: 60 metros.*” *Calcula el área de la plaza.*”

Basándome en las palabras de George Polya en su libro “*Mathematical Discovery*” (1981): “*Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados*”, dejé un tiempo prudencial para que pensaran cuál era el mejor método para resolverlo.

Primero intentaron hacerlo de forma analítica, pero al ver que les costaba bastante trabajo, uno de los alumnos comentó que se podía resolver fácilmente utilizando GeoGebra. Aunque para algunos era desconocido este programa, la mayoría lo había utilizado alguna vez, y en alguno de los casos el nivel de utilización era bastante avanzado.

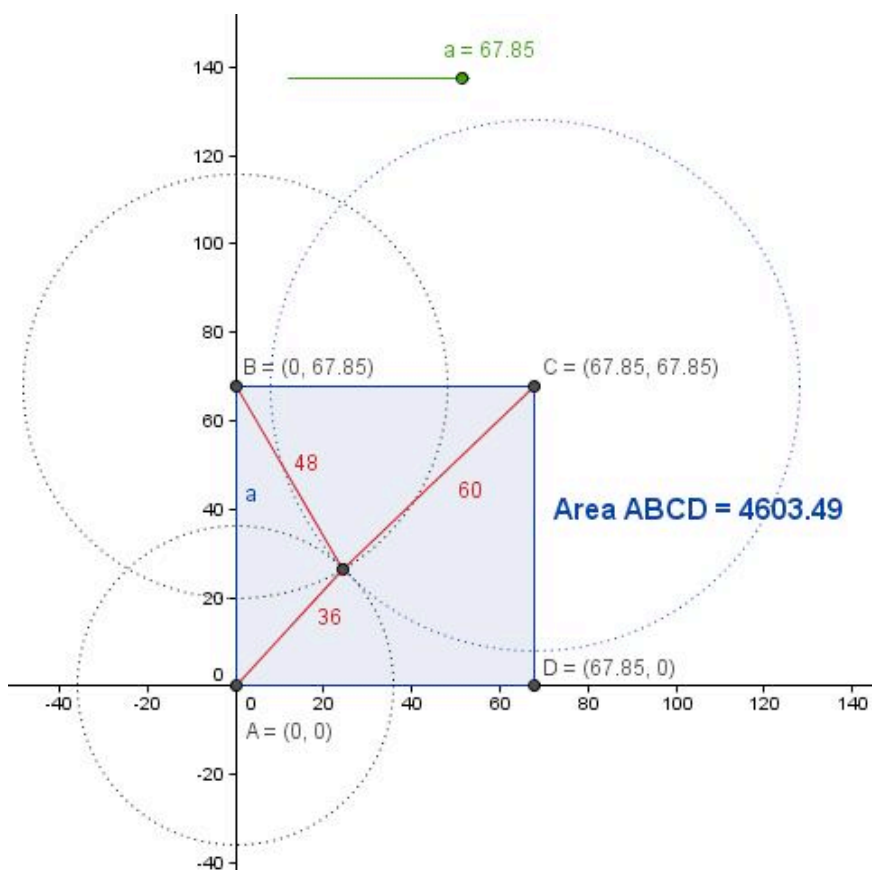


Imagen 2

La primera solución propuesta fue la de construir un cuadrado ABCD, un punto interior P y los segmentos AP, BP y CP, calculando las longitudes de cada segmento y el área del cuadrado. Después con mucha precisión, variar las dimensiones del cuadrado hasta conseguir que los segmentos interiores tuvieran de longitud 48 cm, 36 cm y 60 cm. Una vez conseguido, expresar el resultado del área en m<sup>2</sup>.

Otra propuesta fue la de dibujar el cuadrado ABCD y tres circunferencias de centros A, B y C con radios 48, 36 y 60 cm. Después hacer coincidir las tres circunferencias en un mismo punto de corte que será P y calcular el área del cuadrado. Para ello, lo mejor era utilizar un deslizador “a”, donde a sería el valor del lado del cuadrado de la plaza, es decir los puntos tendrían de coordenadas A=(0,0), B=(a,a) y C=(a,a).

Por último, uno de los alumnos, Jesús Martínez, me entregó una solución al problema de forma analítica, utilizando coordenadas polares.

En primer lugar, para resolver el problema dibujó la siguiente figura:

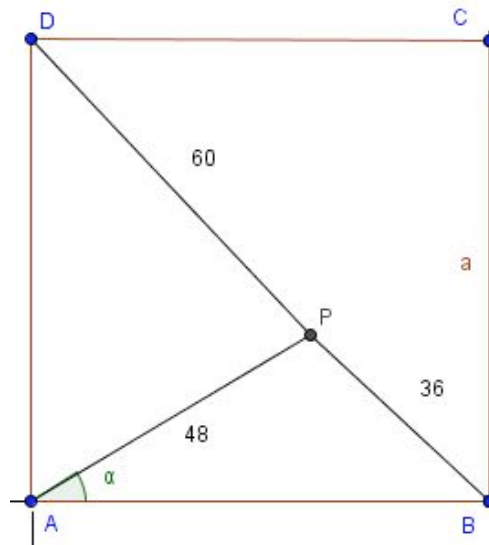


Imagen 3

Consideró como coordenadas de los vértices del cuadrado las siguientes: A=(0,0), B=(a,0), C=(a,a) y D=(0,a), y el punto P con coordenadas: P=(48cosα; 48senα). Utilizando los datos del problema obtuvo dos ecuaciones:

$$1) d(D,P)=60 \Rightarrow \sqrt{(48 \cos \alpha)^2 + (48 \operatorname{sen} \alpha - a)^2} = 60 \Rightarrow -96a \operatorname{sen} \alpha + a^2 = 1296$$

$$2) d(B,P)=36 \Rightarrow \sqrt{(48 \cos \alpha - a)^2 + (48 \operatorname{sen} \alpha)^2} = 36 \Rightarrow 96a \cos \alpha - a^2 = 1008$$

En la primera ecuación despejó  $\operatorname{sen} \alpha$  y utilizó la relación  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$ .

Resolvió la ecuación bicuadrada resultante obteniendo como soluciones:

$$a_1 = 67,85; a_2 = -67,85; a_3 = 24,2; a_4 = -24,2.$$

Como estaba calculando una distancia (positiva), descartó  $a_2$  y  $a_4$ , y  $a_3$  no era una solución válida para este problema.

**Conclusión:** El lado del cuadrado mide 67,85 m y el área de la plaza es **A=4603,5 m<sup>2</sup>**.

Después de esta introducción y viendo como hay problemas que podemos resolverlos utilizando GeoGebra de forma más sencilla que de forma analítica, en cada una de las sesiones intenté utilizar GeoGebra para resolver problemas, construir juegos de estrategia, etc.

### 3. Resolución de problemas

Dada la importancia que tiene la resolución de problemas desde el informe Cockcroft<sup>2</sup> en 1985 hasta la Orden sobre el currículo de Educación Secundaria Obligatoria de la Junta de Andalucía (2007), donde además de enfatizar la idea que la resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático, dictamina que éste debe ser el eje vertebrador<sup>3</sup>, hace que trabaje la resolución de problemas de forma sencilla y dinámica utilizando GeoGebra.

Para los problemas planteados utilicé los materiales realizados para el Proyecto Gauss por José Luis Álvarez García y Rafael Losada Liste y construcciones del curso de formación del ITE.

1) Ranas y sapos.

[http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/aritmetica/patrones/ranas\\_y\\_sapos/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/patrones/ranas_y_sapos/actividad.html)

2) Las jardineras.

[http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/algebra/pautas/jardineras/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/pautas/jardineras/actividad.html)

3) Cruzar la plaza.

[http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/algebra/pautas/cruzar\\_la\\_plaza/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/pautas/cruzar_la_plaza/actividad.html)

4) Fórmula de Pick.

<http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/123/cd/html/pick.html>

A la hora de resolver los problemas, primero lo hicieron de forma manipulativa, moviendo fichas (ranas y sapos), dibujando y utilizando tablas (jardineras y cruzar la plaza) y utilizando el Geoplano (Pick).

Después vieron como era mucho más fácil utilizando GeoGebra.

Mientras manipulaban y dibujaban, uno de los alumnos los resolvía en la pizarra digital y grababa los trabajos en Scrapbook, que es el programa que viene asociado a la pizarra E-Beam, que es la que utilizamos en todas las sesiones.

---

<sup>2</sup> Informe Cockcroft. Las matemáticas si cuentan. Edición española en Estudios de Educación. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid 1985.

<sup>3</sup> Publicado en: Serradó, A. (2009). *El desarrollo de las ocho competencias básicas a través de la resolución de problemas*. *Epsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*, 26(2)

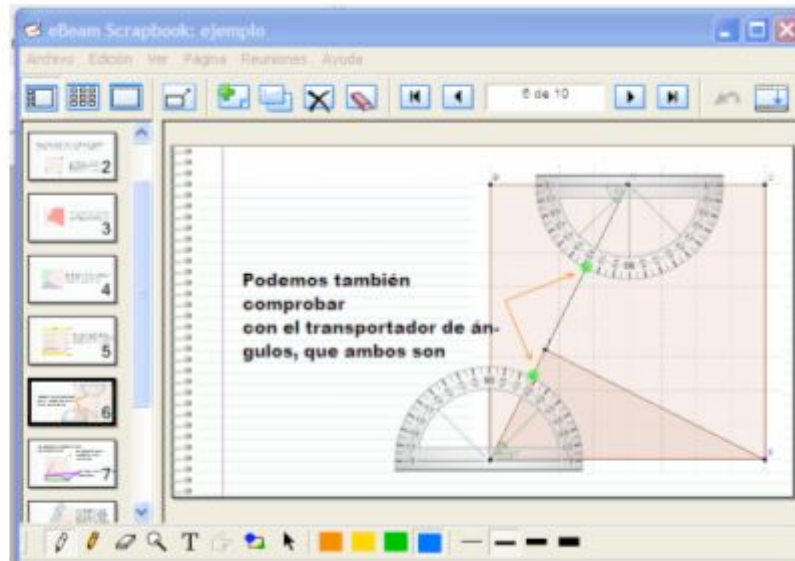


Imagen 4

#### 4. Juegos de estrategia

Dentro del módulo dedicado a juegos recreativos matemáticos dedicamos una especial atención a los juegos de estrategia, ya que en definitiva estábamos trabajando también resolución de problemas.

En este caso, construimos unas construcciones muy sencillas, donde no hacía falta muchos conocimientos sobre GeoGebra, pero que servían para poder llevarlos a la práctica en el aula.

Los juegos que hicimos fueron:

- La espiral: <http://www.matesymas.es/jm/geogebra/espiral.html>
- La escalada: <http://www.matesymas.es/jm/geogebra/escalada.html>
- Tres en raya áureo: [http://www.matesymas.es/jm/geogebra/tresenraya\\_aureo.html](http://www.matesymas.es/jm/geogebra/tresenraya_aureo.html)
- A la pata coja: <http://www.matesymas.es/jm/geogebra/patacoja.html>

Por último integramos todas las construcciones en una unidad didáctica, utilizando eXeLearning (<http://exelearning.org/wiki>).

#### 5. Referencias

- Informe Cockcroft. *Las matemáticas si cuentan*. Edición española en Estudios de Educación. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid 1985.
- Ana Serradó (2009). *El desarrollo de las ocho competencias básicas a través de la resolución de problemas*. Epsilon, Revista de la S.A.E.M. “Thales”, 26(2)
- Problemas con pautas y números*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- Robert Fisher, Alan Vince. *Investigando las Matemáticas*. Akal.
- Proyecto Gauss*. <http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>
- GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas*. <http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/123/cd/index.htm>
- Mates y +*. <http://www.matesymas.es/>