XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE

NIVEL IV (Bachillerato)

¡Lee detenidamente estas instrucciones!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

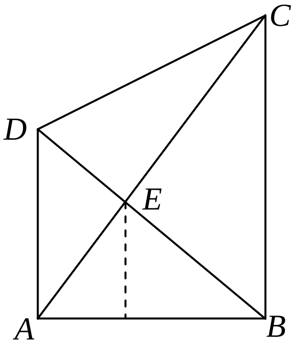
No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

1 En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, de altura *AB* = 6 cm, las diagonales se cortan en el punto *E*, que dista 3 cm de *AB*. Si la diagonal *AC* mide 10 cm, la longitud, en cm, de la diagonal *BD* es:



A) $\frac{36}{5}$ **B)** $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ **C)** $\frac{6\sqrt{41}}{5}$ **D)** $\frac{12\sqrt{11}}{5}$ **E)** Nada de lo anterior

2 La ecuación, de incógnita *x*, $\ln(x+a) = \ln x + \ln a$ (*x* real, *a* > 1).

A) No tiene solución **B)** Tiene solución única **C)** Tiene dos soluciones
D) Se verifica para todo *x* positivo **E)** El número de soluciones depende del valor de *a*.

3 ¿Cuál de las siguientes igualdades puede ser falsa, siendo *x*, *a* y *b* números reales?

A) $x^2 + 2x + 1 = |x+1|^2$ **B)** $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$ **C)** $a^2 - 2ab + b^2 = (-a+b)^2$

D) $1 - \sqrt{x^2} = 1 - x$ **E)** Ninguna de ellas

4 Se considera $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$. Así pues $x = y + z$. En el siguiente razonamiento hay, evidentemente, un error. ¿En qué paso está el error?

A) Como $x = y + z \Rightarrow x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y)$

B) Si $x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y) \Rightarrow x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy$

C) Si $x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy \Rightarrow x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy$

D) Si $x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy \Rightarrow x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z)$

E) Si $x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z) \Rightarrow x = y$

5 La ecuación, de incógnita *x*, $\left|\left||x|-1\right|-b\right| = 4$ tiene exactamente 5 soluciones reales cuando *b* es:

A) Cualquier número positivo **B)** *b* =3 **C)** *b* = 4 **D)** *b* = 5 **E)** 4 < *b* < 5

6 Cuando una botella está llena de agua hasta $\frac{2}{3}$ de su volumen, pesa *a* kg. Cuando está llena hasta la mitad, pesa *b* kg. ¿Cuántos kg pesará cuando esté totalmente llena?

A) $\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}$ **B)** $\frac{3a}{2} - \frac{b}{2}$ **C)** $\frac{3a}{2} + b$ **D)** $\frac{3a}{2} + 2b$ **E)** 3*a*– 2*b*

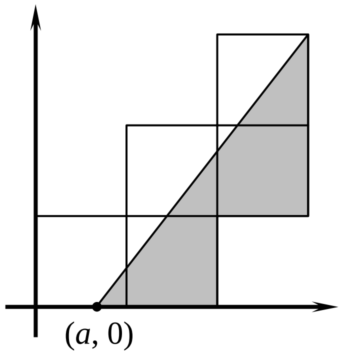
7 En una circunferencia de centro *O* marcamos dos puntos *A* y *C*. Si *B* es un punto exterior tal que *BA* y *BC* son tangentes a la circunferencia y el triángulo *ABC* es equilátero, ¿cuánto vale el cociente $\frac{BD}{BO}$, siendo *D* la intersección de *BO* con la circunferencia?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8 Si la recta *y* = *mx* divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (6*m*, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de *m* es.

A) $-\frac{1}{3}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

9 Dibujamos cinco cuadrados de lado 1 en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas como se muestra en la figura. Si el área de la región sombreada es $\frac{5}{2}$, el valor de a es:



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

10 ¿Cuál es el resto de la división de $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2010}$ entre 8?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

11 ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 12

12 Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$, $a + b + c$ es igual a:

A) – 1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

13 ¿Para qué valor de n se verifica que la suma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + ni^n$ es el número complejo $48 + 49i$?

A) 24 **B)** 48 **C)** 49 **D)** 97 **E)** 98

14 Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro $O(3, 0)$ y radio 1. La suma de sus radios es:

A) 9 **B)** $\frac{17}{2}$ **C)** 8 **D)** $\frac{15}{2}$ **E) 7**

15 Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números complejos. Supongamos que $p(2010 + 102\,i) = p(2010) = p(102) = 0$. ¿Cuántas soluciones reales tiene como máximo la ecuación $0 = x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

16 Para cada entero positivo n, sea $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. ¿Cuál es la suma de todos los valores $f(n)$ que resultan ser números primos?

A) 794 **B)** 796 **C)** 798 **D)** 800 **E)** 802

17 ¿Cuál es el área del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(-2010, 4020)$?

A) 4010 **B)** 4012 **C)** 4014 **D)** 4016 **E)** 4018

18 Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Sacamos las bolas sin mirar una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que en algún momento sólo queden bolas blancas?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

19 Si $sen\ a + sen\ b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ a + cos\ b = 1$, $cos(a - b)$ es igual a:

A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

20 En el interior del triángulo equilátero *ABC* elegimos un punto *P*. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo *ABP* sea mayor que el área del triángulo *ACP* y que el área del triángulo *BCP*?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

21 ¿En qué intervalo está el número $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?

A) (–2, –1) **B)** (1, 2) **C)** (–3, –2) **D)** (2, 3) **E)** (3, 4)

22 En el triángulo *ABC*, con *AB* = *AC*, resulta que tanto la longitud del lado *BC* como la de la altura que parte de *A* vienen dadas por números enteros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) *senÂ* es racional y *cosÂ* irracional **B)** *senÂ* y *cosÂ* son números racionales

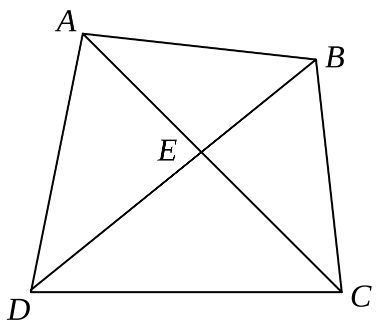
C) *senÂ* es irracional y *cosÂ* racional **D)** *senÂ* y *cosÂ* son irracionales

E) La irracionalidad de *senÂ* y *cosÂ* depende de los valores de *BC* y de la altura

23 Sea $M = \{(x, y) / \ y \geq x^2\}$ y $N = \{(x, y) / \ x^2 + (y - a)^2 \leq 1\}$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es condición necesaria y suficiente para que $M \cap N = N$?

A) $a \geq \frac{5}{4}$ **B)** $a = \frac{5}{4}$ **C)** $a \geq 1$ **D)** $0 < a < 1$ **E)** $1 < a < \frac{5}{4}$

24 En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está hecho a escala, se verifica que *AB* = 9 y *CD* = 12. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Si *AC* = 14 y los triángulos *AED* y *BEC* tienen igual área, ¿cuál es la longitud de *AE*?



A) $\frac{9}{2}$ **B)** $\frac{50}{11}$ **C)** $\frac{21}{4}$ **D)** $\frac{17}{3}$

E) 6

25 El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (*x*, *y*) tales que $|x - 1| + |y - 1| = 1$ es:

A) 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** 3 **D)** π **E)** 4