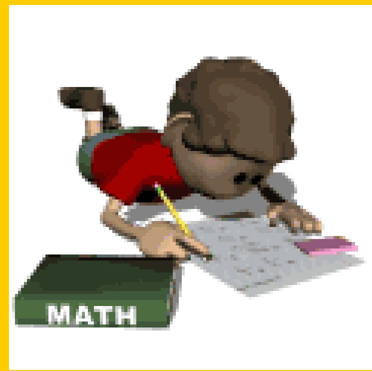
Problema de Idiomas



5 Aniversario

XXV Olimpiada Thales

PROBLEMAS DE IDIOMAS



El profesor de Matemáticas le propuso a Arquimedín la siguiente cuestión: *“En la clase de al lado 6 estudiantes saben español, 7 inglés y 5 francés. De éstos sólo uno habla los tres idiomas. De los demás, se sabe que exactamente 2 saben sólo español e inglés, exactamente 2 saben sólo inglés y francés y 1 único alumno sabe sólo español y francés. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?”.*

Arquimedín le contestó: *“Profesor, estoy convencido que 12”*.

¿Es correcta la contestación? Razona tu respuesta.

Solución

¡Debemos elegir la mejor estrategia para obtener el resultado correcto! ”

“¡Leamos con detalles!”

5 Aniversario

Solución

Vamos a ponernos en situación. Hay varias formas de abordar el problema.

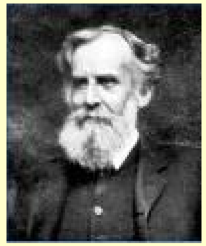
"Veamos si Arquimedín tiene razón, y el número de alumnos de la clase de al lado es 12"

5 Aniversario

Solución

Si aplicamos Álgebra Lineal vamos a tener alguna dificultad para llegar a la solución.

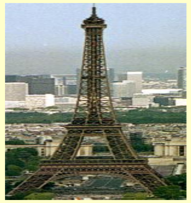
"Vamos a recurrir a uno de los métodos gráficos de representación utilizado por John Venn (Matemático conocido por sus sistemas de representación gráfica de proposiciones)"

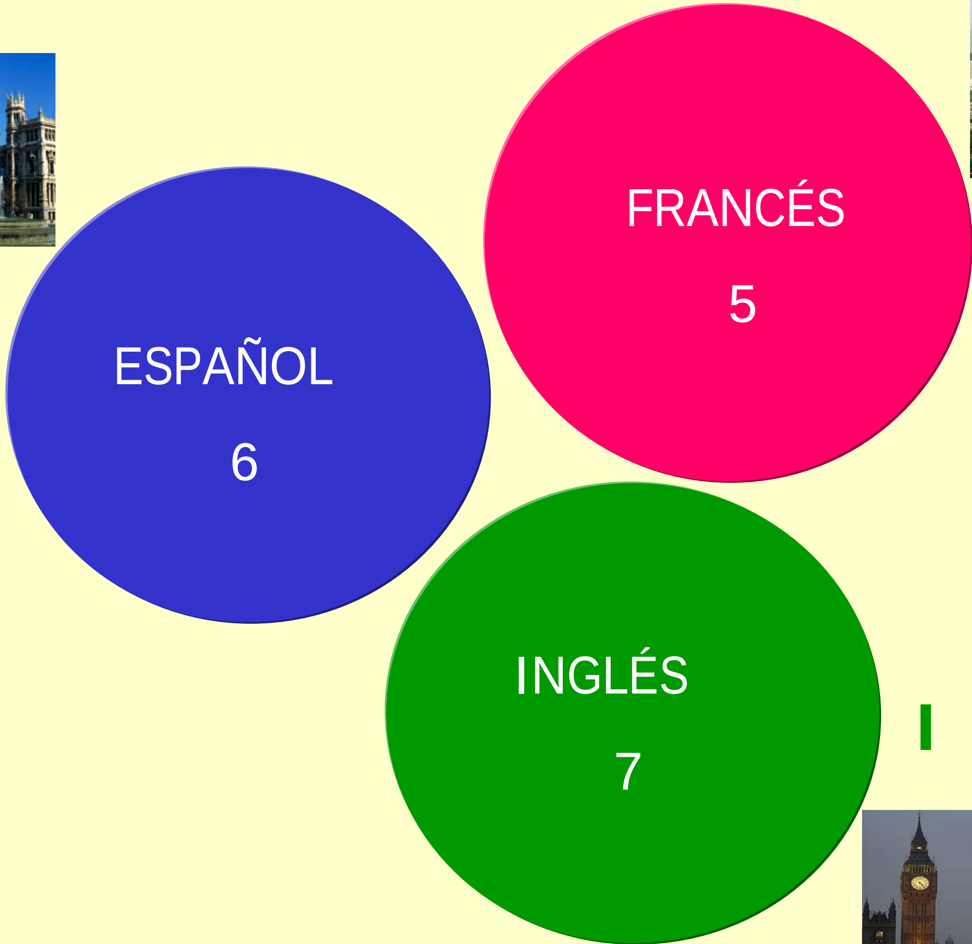


John Venn
(Drypool, 1834-Cambridge, 1923)

Solución

Vamos a representar los alumnos así:





Solución

"¿Por dónde empezamos?"

Vemos la distribución de todos los estudiantes tal como se ha planteado en el enunciado:

Saben ESPAÑOL (E): 6

Saben INGLÉS (I): 7

Saben FRANCÉS (F): 5

Saben ESPAÑOL+INGLÉS+FRANCÉS (EIF): 1

Saben ESPAÑOL+INGLÉS (EI): 2

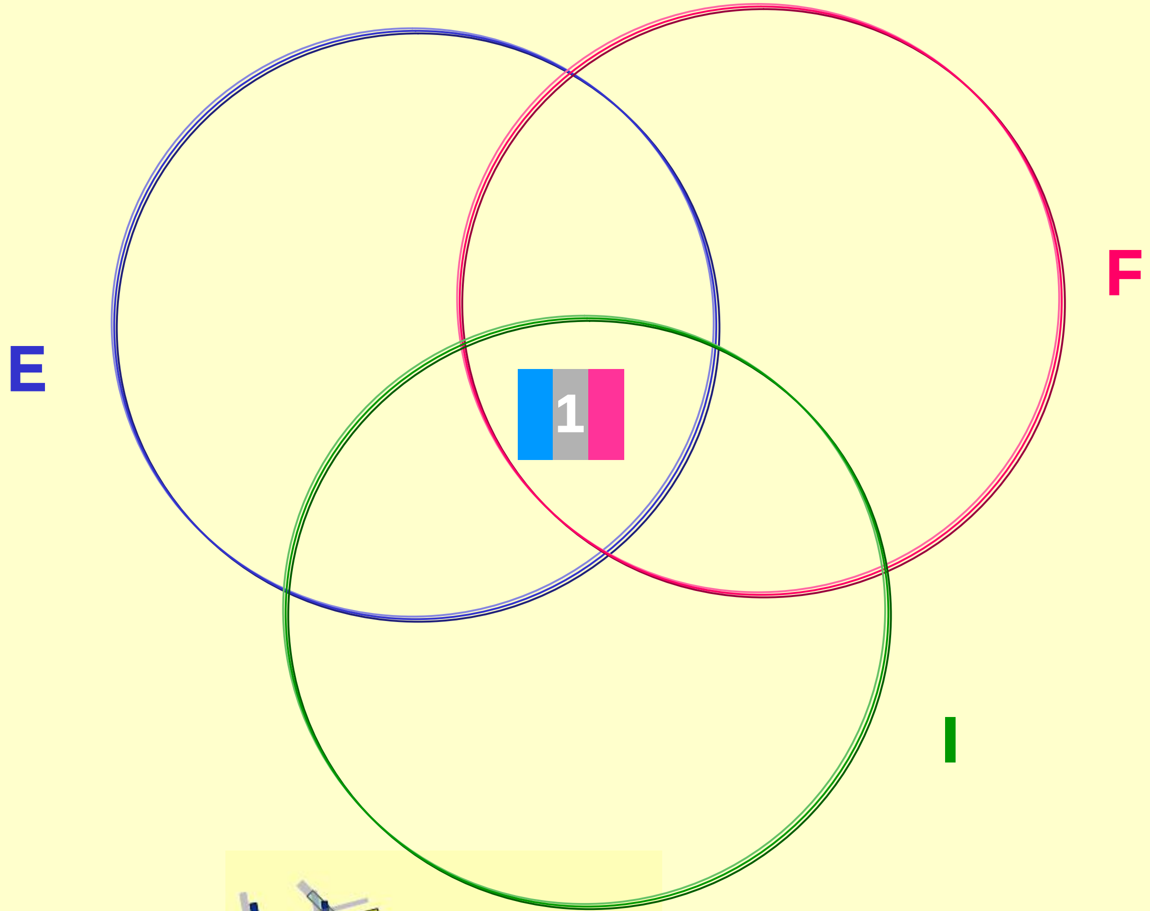
Saben INGLÉS+FRANCÉS (IF):2

Saben ESPAÑOL+FRANCÉS (EF): 1

Solución

La estrategia consiste en representar:

PRIMERO, los que hablan los tres idiomas: EIF que es 1

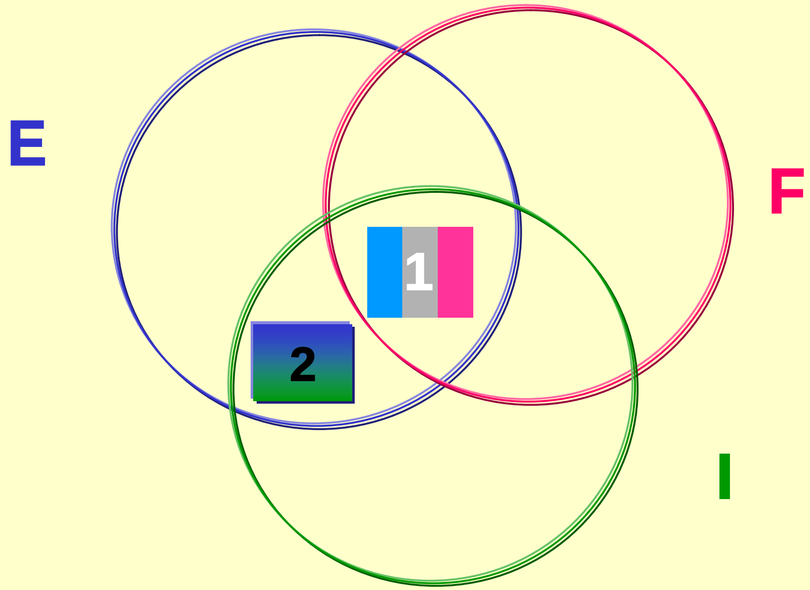


Solución

Una vez encajado el que habla EIF .La estrategia consiste en representar los que hablan dos idiomas:

Español-Inglés: EI

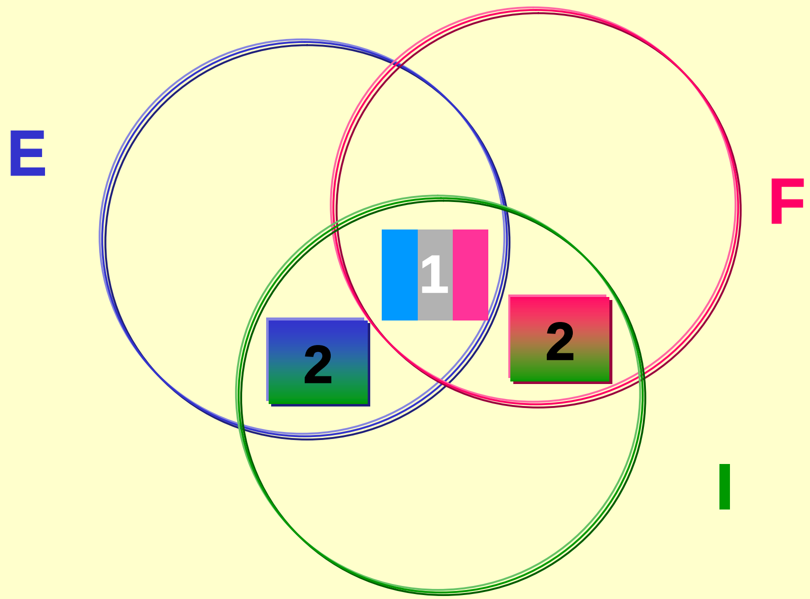
a) Sabemos que en total hablan EI: 2, por lo tanto los encajamos en la zona donde hablan sólo estos dos idiomas.

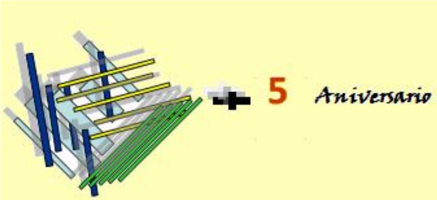


Solución

Inglés-Francés: IF

b) Sabemos que en total hablan IF: 2, por lo tanto colocamos 2 en la zona donde sólo se hablan los idiomas citados.

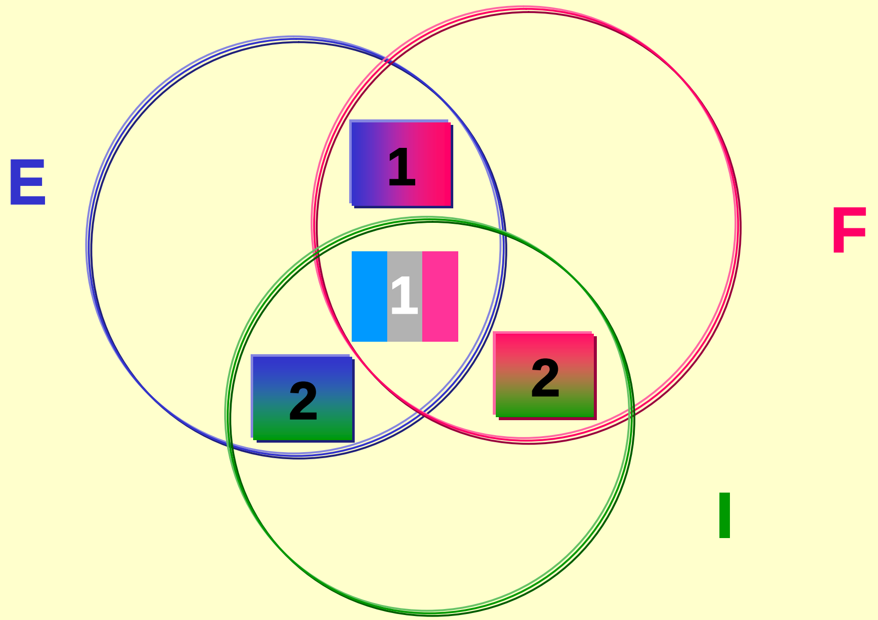




Solución

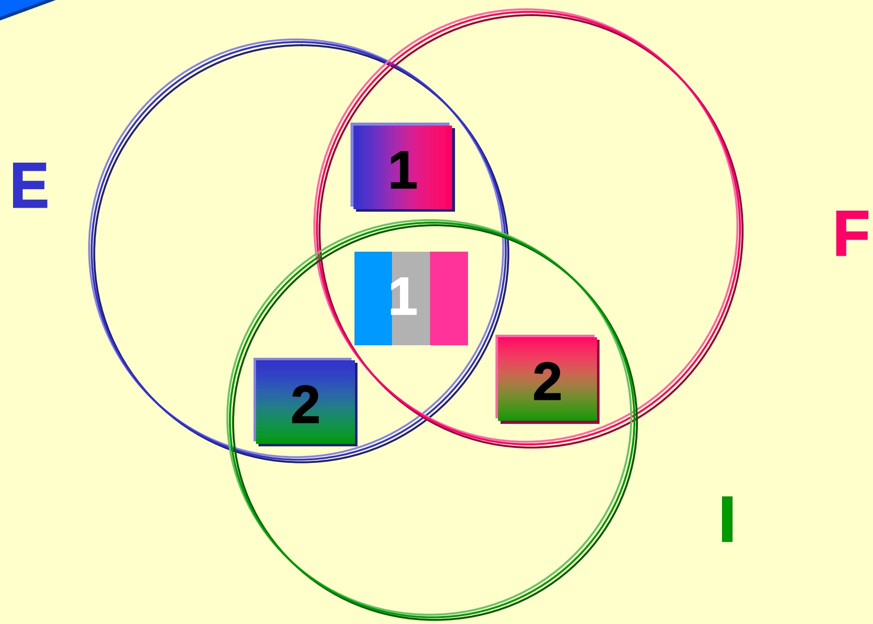
Español-Francés: EF

c) Y por último colocamos el que habla sólo EF, en la zona correspondiente.

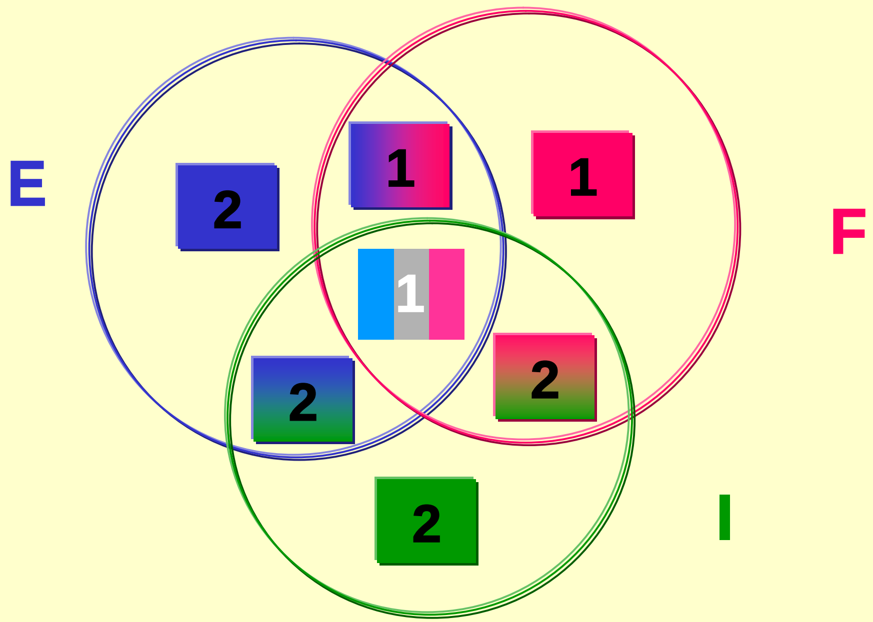


Solución

“Qué bien nos ha venido el diagrama de Venn, parece que la solución se acerca. Todavía no sabemos si Arquimedín ha acertado”



Solución



Con esta representación ya es fácil encajar el resto de los estudiantes que faltan:

a) Cómo hay 6 que hablan español nos falta por colocar

6-(1+1+2)=2

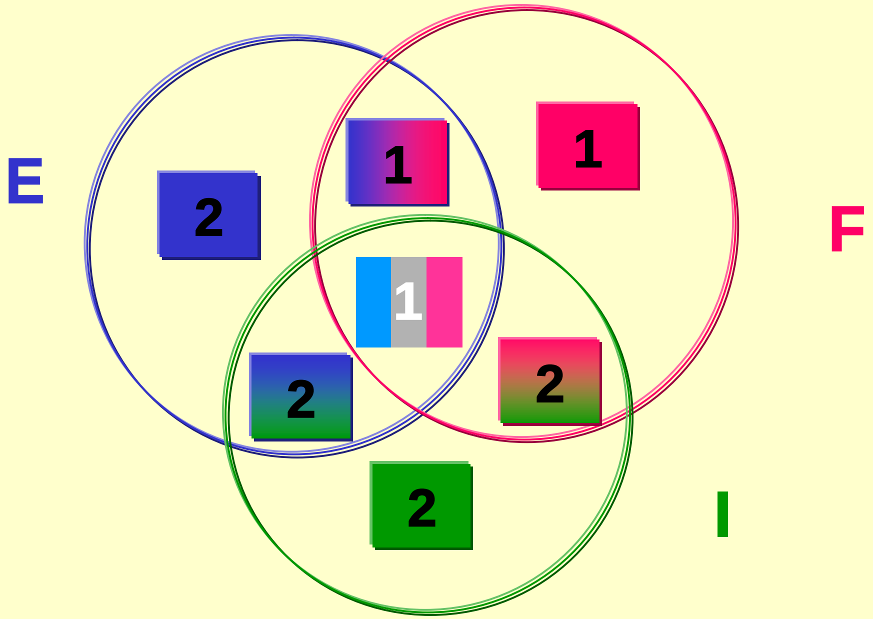
b) Cómo hay 7 que hablan inglés nos falta por colocar

7-(1+2+2)=2

c) Cómo hay 5 que hablan francés nos falta por colocar

5-(1+1+2)=1

Solución



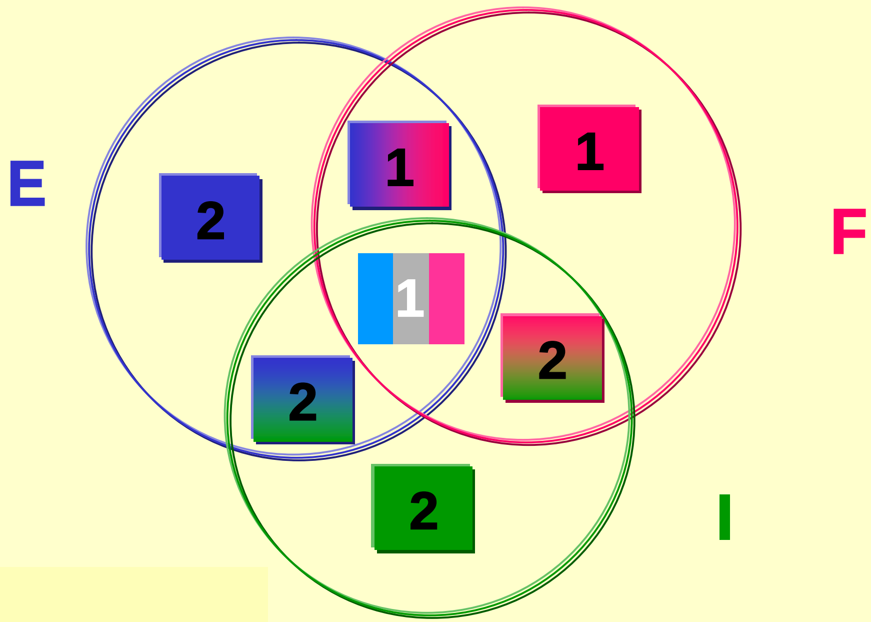
Basta con sumar todos los estudiantes que aparecen representados por los tres idiomas y cuyo total es:

2+2+2+2+1+1+1=11

Solución

“No pasa nada, Arquimedín, has estado muy cerca pero no son 12 los alumnos de la clase de al lado sino”

11



5 Aniversario

Solución

"Hemos utilizado el procedimiento gráfico de Venn. Otra forma de hacerlo, es utilizando la teoría de conjuntos"

Ejemplo:

En la figura adjunta tienes un conjunto de estudiantes

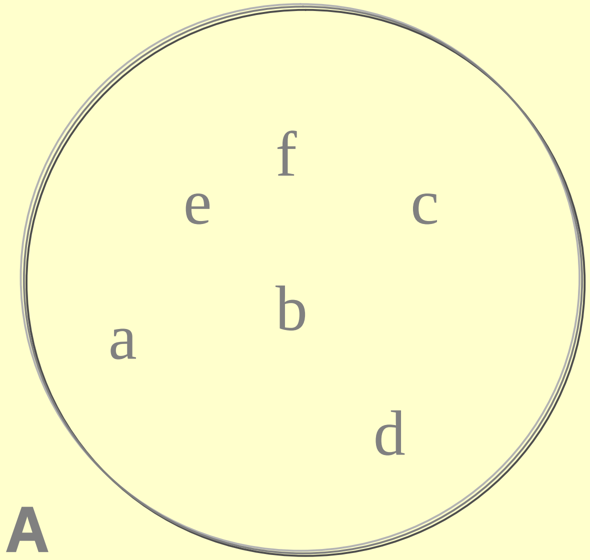
Un conjunto se puede entender como una colección o agrupación bien definida de objetos de cualquier clase.

Los objetos que forman un conjunto son llamados miembros o elementos del conjunto.

5 Aniversario

Solución

“¿Qué significa el cardinal de un conjunto?



LLamamos cardinal de un conjunto A al número de sus elementos, y lo representamos por

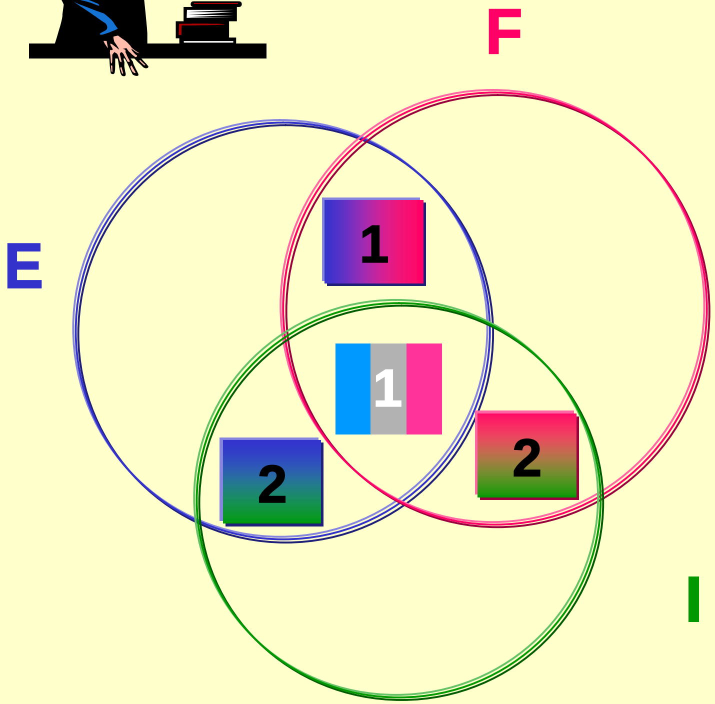
card(A)

Por lo tanto en este ejemplo

card(A)=6

Solución

"En nuestro caso tenemos tres conjuntos con elementos comunes entre ellos. Por lo tanto tenemos que hablar de dos operaciones entre conjuntos: la intersección y la unión."



Según la distribución dada en el enunciado

card(E)=6; card(I)=7; card(F)=5

card(EI)=3; card(IF)=3; card(EF)=2

card(EIF)=1

Conocemos, por lo tanto, el cardinal de cada conjunto y el cardinal de las intersecciones

Solución

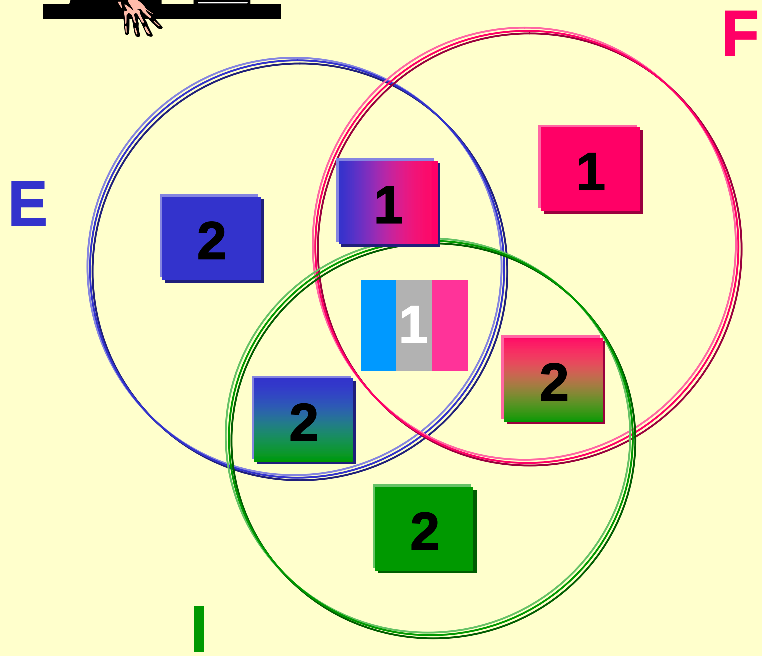
"A continuación escribimos la fórmula que nos permite relacionar las citadas operaciones entre dos y tres conjuntos"

Por lo tanto, se puede demostrar por inducción que conociendo el cardinal de cada conjunto, así como el cardinal de cada intersección de dos y de tres conjuntos (en nuestro caso), la fórmula para calcular el cardinal de la unión $E \cup F \cup I$ es:

$$\mathrm{card}(E \cup F \cup I) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) + \mathrm{card}(I) - \mathrm{card}(E \cap F) - \mathrm{card}(E \cap I) - \mathrm{card}(I \cap F) + \mathrm{card}(E \cap F \cap I)$$

Solución

"¿Habrá algún resultado sorpresa que no coincida con la forma empleada anteriormente?



Se tiene que

$$\mathrm{card}(E \cup F \cup I) = 6+5+7-3-3-2+1 = \mathbf{11}$$

Igual resultado. ¡Lo sentimos Arquimedín!