

# ¿CUÁNTO DURARÁ EL MUNDO?

Lo que aparentemente es sólo un juego puede convertirse en un valioso modelo donde estudiar difíciles temas matemáticos. Un caso estrella es el del juego de las Torres de Hanoi inventado en 1883 por el matemático francés Edouard Lucas. Al abrigo de una preciosa leyenda inventada por Lucas, se hizo muy famoso a finales del siglo XIX. Con el tiempo la computabilidad hizo uso del juego para estudiar nada menos que la eficiencia de algoritmos.

por Lolita Brain

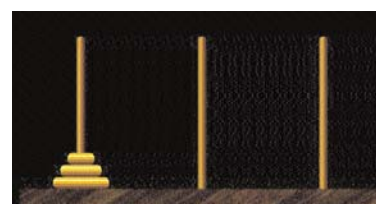
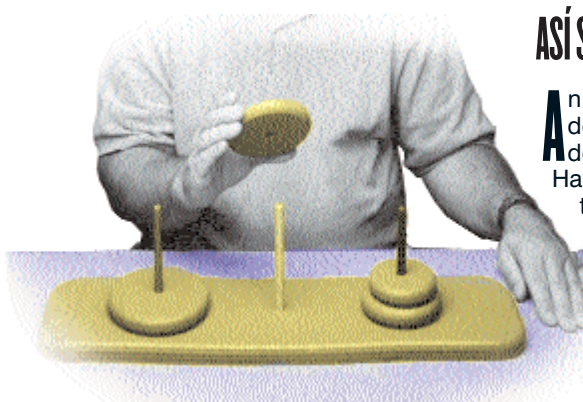


## LA LEYENDA

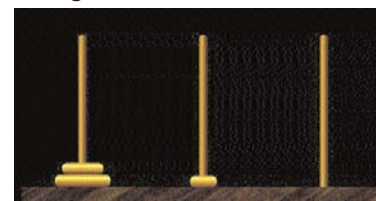
En Benarés, en la India, cuenta la leyenda que el Dios creador Brahma entregó a los monjes tres vástagos diamantinos sobre una base de bronce. Ensartó entonces 64 discos de oro, todos de dimensiones distintas, en uno de las varillas, dispuestas de modo que el mayor estuviera en la base y los discos fueran decreciendo en tamaño. Y ordenó entonces a los monjes que moviesen toda la Torre de Brahma a otro de los vástagos de modo que en cada traslado sólo un disco dorado fuese movido, y de modo tal que nunca un disco tuviera bajo sí otro de menor tamaño. Al final sentenció: "Cuando hallais acabado la tarea el mundo se vendrá abajo como montaña de polvo".

## ASÍ SE JUEGA

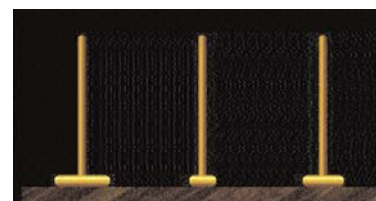
En continuación puedes ver una solución de las Torres de Hanoi, para el caso de tres discos. Son necesarios **siete** movimientos como mínimo para resolver este sencillo caso.



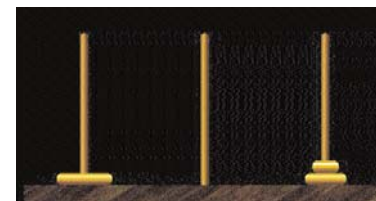
Estado inicial. Llevar la torre a un vástago vacío.



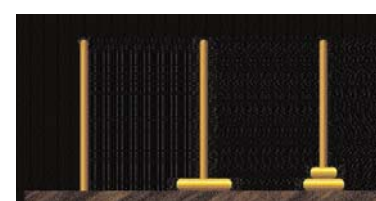
El primer movimiento es obvio.



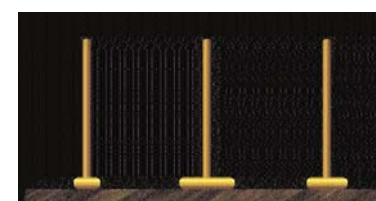
El segundo también está decidido.



Hacemos sitio para mover el mayor



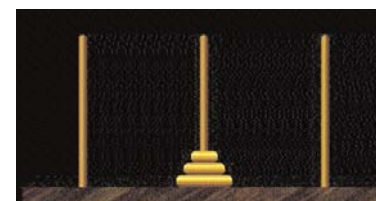
Movemos el disco mayor. ¡Por fin!



Ahora volvemos al paso uno.



Repetimos el paso dos y ¡ya está!



## ¿POR QUÉ ES RECURSIVO ESTE JUEGO?

Para que comprendamos por qué este juego puede resolverse recursivamente, vamos a fijarnos en una Torre de Hanoi con cuatro discos y vamos a solucionarlo utilizando el procedimiento que conocemos para el de 3 discos. De este modo, para resolver una torre de 4, se necesita solucionar la de 3 discos. A su vez la solución de la torre de 3 discos, se reduce a la de 2. Esta es la recursión.



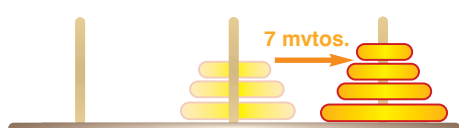
Este es el estado inicial del juego con 4 discos.



Tras siete movimientos conseguimos mover tres discos a otro vástago. La pieza mayor no se ha movido todavía.



En un movimiento llevamos el disco mayor al vástago vacío.

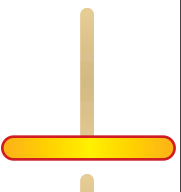
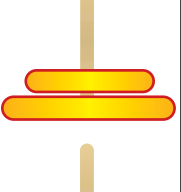
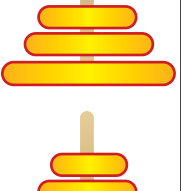
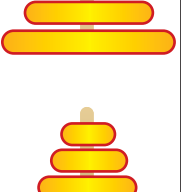
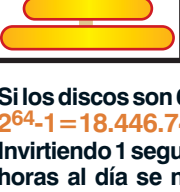


Con siete movimientos más llevamos la pila de tres discos sobre el disco mayor. El juego ha terminado.



## ¿TENÍA RAZÓN BRAHMA?

Según la leyenda, el mundo duraría el tiempo invertido por los monjes en resolver una Torre de Hanoi de 64 discos. Si bien, solucionar el juego no es muy difícil, el número de movimientos necesarios para hacerlo crece exponencialmente conforme aumenta el número de discos. Contemos utilizando la recursividad de la solución.

Nº DE DISCOS	Nº MÍNIMO DE MOVIMIENTOS
	$1 = 2^0$
	2 TORRES DE 1 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $1 + 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$
	2 TORRES DE 2 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $3 + 1 + 3 = 7 = 2^3 - 1$
	2 TORRES DE 3 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $7 + 1 + 7 = 15 = 2^4 - 1$
	2 TORRES DE 4 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $15 + 1 + 15 = 31 = 2^5 - 1$

Si los discos son 64, como en la leyenda, se necesitan  $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$  movimientos. Invertiendo 1 segundo por movimiento y dedicando 24 horas al día se necesitarían casi 6.000 millones de siglos.

## LA RECURSIVIDAD Y LA LÓGICA

Cuando desde el primer tercio del siglo XX, los matemáticos se adentraron en la computabilidad y en la automatización del razonamiento, encontraron un tipo especial de funciones, las llamadas FUNCIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS a partir de las cuales es posible construir todo el acervo matemático computable. Por supuesto estas funciones son recursivas no sólo por su nombre.



KURT GÖDEL (1906 - 1978)

Un procedimiento se llama **ALGORÍTMICO** si puede *mecanizarse* a través de un conjunto finito de instrucciones elementales y fijados de antemano. Por ejemplo, la forma que inventó Euclides para calcular el máximo común divisor o cómo preparar un plato culinario.

El proceso algorítmico se denomina **RECURSIVO** cuando su ejecución requiere de la repetición similar de pasos, en cada uno de los cuales el procedimiento se *llama* a sí mismo para ejecutarse pero sobre valores menores de algún parámetro. Es similar a los fenómenos autorreferentes.