Algunas propiedades algebraicas y geométricas de la espiral logarítmica.

He aquí un resumen de las propiedades algebraicas y geométricas de la espiral logarítmica o *Spira Mirabilis* de Bernouilli:

- Si un radio vector está animado de una velocidad angular uniforme en torno a uno de sus puntos (polo), un punto que se mueva sobre esta semirrecta con una velocidad proporcional a su distancia al polo describe una espiral logarítmica, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = a^{\omega}$

  En efecto, de la definición de la curva resulta: $\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = b.\rho \\ \dfrac{d\omega}{dt} = c \end{cases}$, siendo b, $c \in \mathbb{R}$.

  De donde: $\dfrac{d\rho}{d\omega} = \dfrac{b.\rho}{c}$, esto es: $\dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{b.d\omega}{c}$, luego $\ln(\rho) = \dfrac{b}{c}.\omega$ y entonces

$$\rho = e^{\frac{b}{c}.\omega} = \left(e^{\frac{b}{c}} \right)^{\omega} = a^{\omega}$$

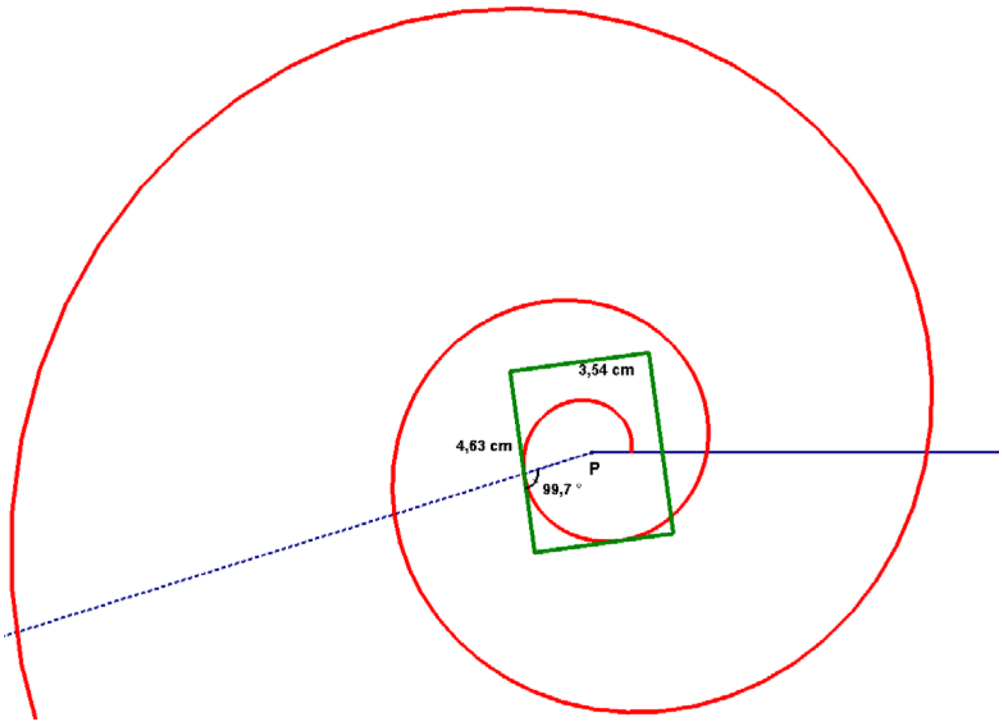
- Por tanto, el radio crece en progresión geométrica cuando el ángulo crece en progresión aritmética. Salvo un factor constante, los ángulos-vectores son, pues, los logaritmos de los radios correspondientes; de donde resulta que, cuando tres radios correspondientes están separados por ángulos iguales, el radio intermedio es media proporcional entre los radios extremos.

- El radio vector forma también en toda espiral logarítmica un ángulo constante (el ángulo característico α) con la curva.

- Descartes descubrió otra propiedad importante: Si B y C son dos puntos de una espiral logarítmica, las distancias del polo O a B y a C son proporcionales a los radios OB y OC; el crecimiento en la dirección de la curva y el crecimiento en la dirección del radio vector están en una razón constante.

Toda espiral logarítmica que recuerde a la razón θ está caracterizada por un esquema de crecimiento, que puede ser simplificada a una progresión geométrica. La serie 1, ϕ, ϕ^2, ϕ^3, ..., ϕ^n tiene entre otras propiedades la de ser a la vez geométrica y aritmética[1]; esto es, permite obtener el crecimiento homotético de carácter exponencial por medio de adiciones de elementos simples.

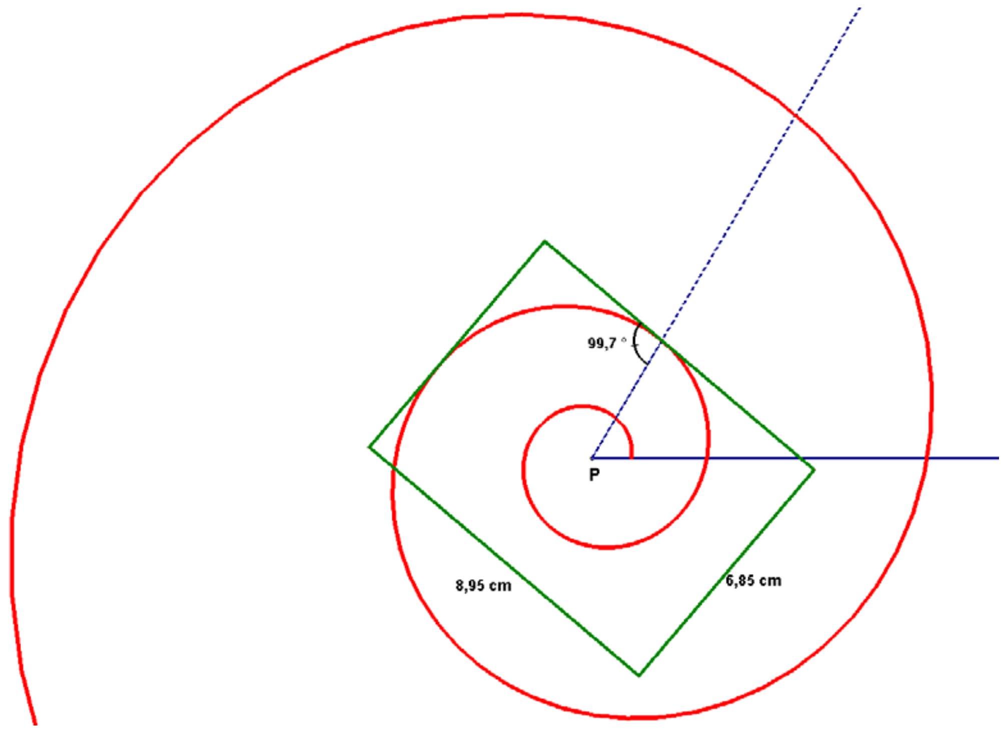
[1] $\phi^2=1+\phi$; $\phi^3=\phi(1+\phi)=\phi+\phi^2=1+2\phi$, ...



Mostramos aquí dos rectángulos "circunscritos" sobre una espiral logarítmica, determinados, en cada caso, por dos puntos de tangencia que se diferencia 90º en el crecimiento de la espiral.

En cada espiral la proporción de dichos rectángulos es fija, lo que pone de manifiesto de otro modo el crecimiento gnomónico de la espiral logarítmica.

Las dos imágenes de esta página corresponden a una espiral de ecuación en polares $\rho \simeq e^{0'17.\omega}$**, cuyos rectángulos asociados mantienen la proporción cordobesa.**



BC'=ϕ
AB=1
AC=ϕ

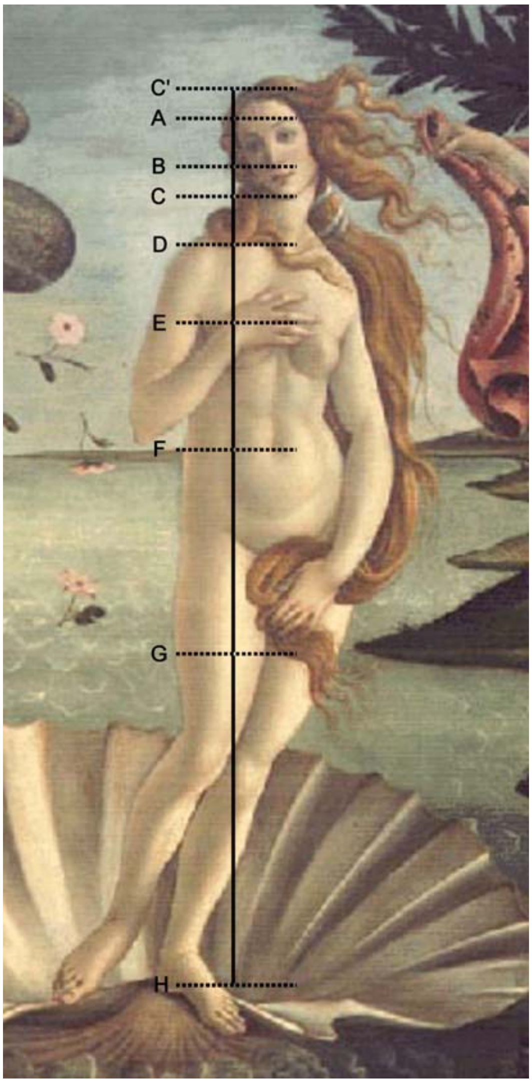
AD=ϕ^2

AE=ϕ^3

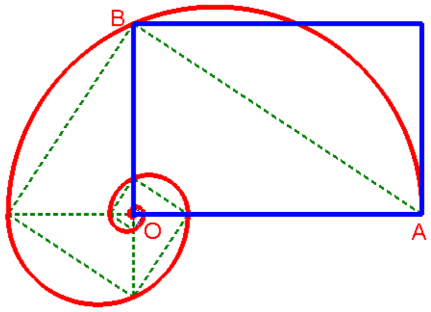
AF=ϕ^4

AG=ϕ^5

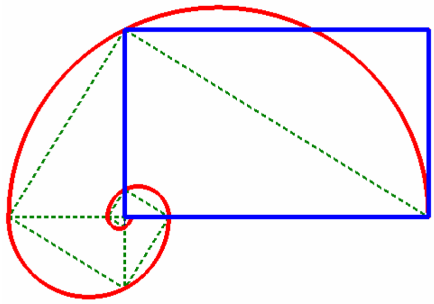
AH=ϕ^6



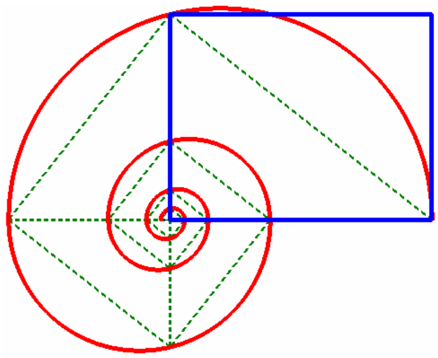
Detalle del *Nacimiento de Venus* de Botticelli con trama geométrica superpuesta basada en la progresión áurea.



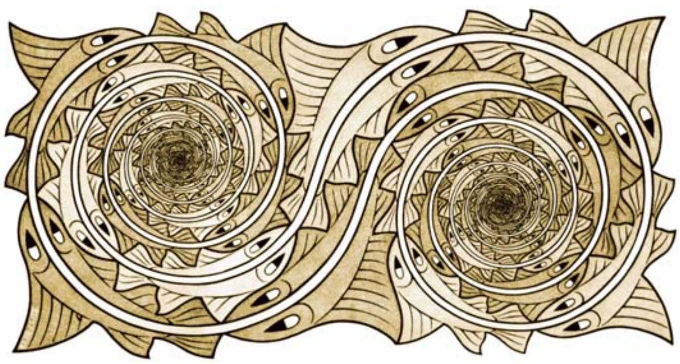
Pseudoespiral[2] logarítmica de módulo $n = \frac{OA}{OB}$



Pseudospiral logarítmica de módulo ϕ



Pseudoespiral logarítmica de módulo $\sqrt{\phi}$



***Remolinos* de M.C. Escher, 1957.**

[2] Dado que una espiral realmente no puede trazarse con compás, éstas son falsas espirales.