XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase
Primera sesión
Viernes mañana, 23 de enero de 2009

1. Calcular la suma $2\left[h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2}{2009}\right)+\ldots+h\left(\frac{2008}{2009}\right)\right]$, siendo

$h(t)=\frac{5}{5+25^{t}}$, $t\in R$.

2. Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro es un rombo, probar que necesariamente el rombo es un cuadrado.

3. Se consideran un cubo de $1cm$ de arista y dos vértices, A y B, diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud n a una sucesión de $n+1$ vértices de forma que dos consecutivos están a $1cm$ de distancia.
¿Cuál de los siguientes números es mayor: el número de caminos de longitud $1000\,cm$ que empiezan y acaban en A, o el número de caminos de longitud $1000\,cm$ que empiezan en A y acaban en B? Justificar la respuesta.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2009

4. Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para que puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

5. La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

6. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 24 de enero de 2009

1. Probar que para todo entero positivo n, $n^{19} - n^{7}$ es divisible por 30.

2. Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:

i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.

ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

3. Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto P de ella, la fila y columna que pasan por este punto P tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que P. Determinar todos los pares de enteros positivos (m, n) para los que existe una retícula equilibrada.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase
Segunda sesión
Sábado tarde, 24 de enero de 2009

Olimpiada Matemática Española RSME

4. En el interior de un paralelogramo $ABCD$ se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados AB y AD, y la otra es tangente a los lados CD y CB. Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal AC.

5. Dado un número natural n mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros a y b, tales que las dos ecuaciones $x^n + ax - 2008 = 0$ y $x^n + bx - 2009 = 0$ tengan, al menos, una raíz común real.

6. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias exteriores tangentes en el punto P. Por un punto A de C_2 trazamos dos rectas tangentes a C_1 en los puntos M y M'. Sean N y N' los puntos respectivos de corte, distintos ambos de A, de estas rectas con C_2.

Probar que $|PN'| \cdot |MN| = |PN| \cdot |M'N'|$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.