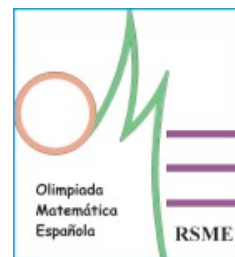




# XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Primera sesión

Viernes mañana, 23 de enero de 2009



1. Calcular la suma  $2 \left[ h\left(\frac{1}{2009}\right) + h\left(\frac{2}{2009}\right) + \dots + h\left(\frac{2008}{2009}\right) \right]$ , siendo

$$h(t) = \frac{5}{5 + 25^t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro es un rombo, probar que necesariamente el rombo es un cuadrado.

3. Se consideran un cubo de  $1\text{ cm}$  de arista y dos vértices,  $A$  y  $B$ , diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud  $n$  a una sucesión de  $n+1$  vértices de forma que dos consecutivos están a  $1\text{ cm}$  de distancia.

¿Cuál de los siguientes números es mayor: el número de caminos de longitud  $1000\text{ cm}$  que empiezan y acaban en  $A$ , o el número de caminos de longitud  $1000\text{ cm}$  que empiezan en  $A$  y acaban en  $B$ ? Justificar la respuesta.

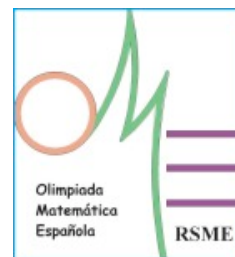
**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**



## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Segunda sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2009



4. Dado un triángulo acutángulo  $ABC$ , determinar para que puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

5. La igualdad  $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$  es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

- i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.
- ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

6. Se tienen en el plano  $3n$  puntos:  $n$  de color blanco,  $n$  de color azul y  $n$  de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante  $n+1$  segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

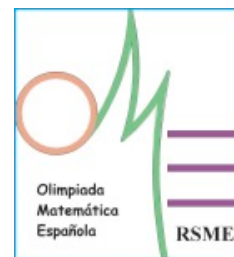
**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**



## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Primera sesión

Sábado mañana, 24 de enero de 2009



1. Probar que para todo entero positivo  $n$ ,  $n^{19} - n^7$  es divisible por 30.
  
2. Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:
  - i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.
  - ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.
  
3. Los puntos de una retícula  $m \times n$  pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto  $P$  de ella, la fila y columna que pasan por este punto  $P$  tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que  $P$ . Determinar todos los pares de enteros positivos  $(m, n)$  para los que existe una retícula equilibrada.

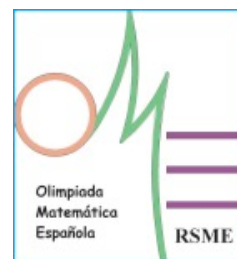
**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**



## XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase  
Segunda sesión

Sábado tarde, 24 de enero de 2009



4. En el interior de un paralelogramo  $ABCD$  se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados  $AB$  y  $AD$ , y la otra es tangente a los lados  $CD$  y  $CB$ . Probar que si estas circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia está en la diagonal  $AC$ .

5. Dado un número natural  $n$  mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros  $a$  y  $b$ , tales que las dos ecuaciones  $x^n + ax - 2008 = 0$  y  $x^n + bx - 2009 = 0$  tengan, al menos, una raíz común real.

6. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias exteriores tangentes en el punto  $P$ . Por un punto  $A$  de  $C_2$  trazamos dos rectas tangentes a  $C_1$  en los puntos  $M$  y  $M'$ . Sean  $N$  y  $N'$  los puntos respectivos de corte, distintos ambos de  $A$ , de estas rectas con  $C_2$ .

Probar que  $|PN'| \cdot |MN| = |PN| \cdot |M'N'|$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**