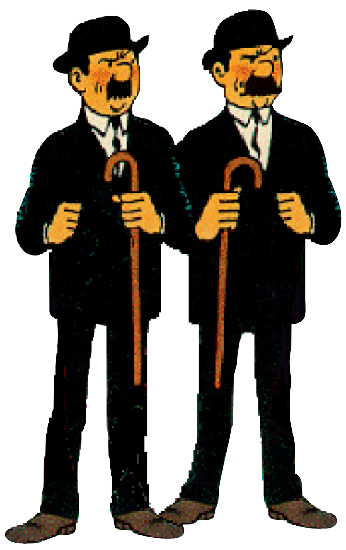
PERFECTOS, AMIGOS Y GEMELOS

Aunque conocemos desde la más tierna edad la clasificación de los números como pares e impares, y más adelante estudiamos en el colegio otros tipos de números especiales, como los primos, lo cierto es que las categorías en las que se clasifican los números enteros son numerosas y atienden a diversos criterios, siendo los que tienen relación con los divisores -su número y valor- de las más interesantes. Aparecen entonces los números perfectos, los primos gemelos, los números amigos y muchos más. Hoy nos daremos un baño por este universo de los elementos de las Matemáticas: los números naturales y enteros.

por Lolita Brain

Los DIVISORES PROPIOS de un número dado nos proporcionan las partes en las que, de modo exacto, puede *partirse* dicho número. Por ejemplo, los divisores propios del 12 son 1, 2, 3, 4 y 6, y por tanto este número se puede partir en 2, 3, 4 o 6 partes iguales sin que sobre ni falte. Observa que, en la vida real, cuando componemos las partes en las que hemos dividido un todo, obtenemos el total. ¿Pasará lo mismo con los números? Pues NO.
Si tomamos el 12, por ejemplo, y sumamos sus divisores, resulta 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16, que es mayor que 12. Decimos que 12 es un número ABUNDANTE (como el 18 o el 20).
En cambio, si comenzamos con el 10, cuyos divisores propios son 1, 2 y 5, al sumarlos obtenemos 1 + 2 + 5 = 8, que es menor que 10. Decimos que 10 es DEFICIENTE (como el 4, 8 o 9).
Pero ¿y si hubiéramos tomado el 6? Veamos: el 6 se divide propiamente por 1, 2 y 3. Realizando la suma de antes obtenemos 1 + 2 + 3 = 6. ¡El mismo número que de partida! Estos son los números PERFECTOS, algo así como los *top-models* de los números.

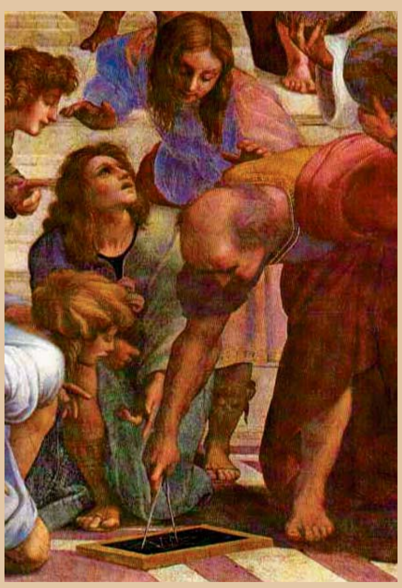
6



En el mundo de los números, no sólo hay amigos y perfectos. Los gemelos también se encuentran y con unos *lazos familiares* muy estrechos. Para que dos números sean GEMELOS, han de ser primos y además diferenciarse en dos unidades. Por ello se llaman también PRIMOS GEMELOS. ¿Por qué los denominamos así? Porque la diferencia entre dos números primos es siempre mayor o igual que dos (¡excepto el 2 y el 3!). Por ejemplo, 3 y 5 son primos gemelos, y también las parejas 5 y 7, 17 y 19, 29 y 31,101 y 103. Pero pueden encontrarse parejas de gemelos muy grandes, como 1.000.000.061 y 1.000.000.063, lo cual no deja de ser sorprendente ya que los números primos *escasean* cuando aumentan. Se ha conjeturado que existen infinitas parejas de primos gemelos, pero este término no ha sido probado todavía.

LOS PERFECTOS

Como hemos visto, el 6 es un número perfecto y además es el más pequeño que existe. A partir de aquí los matemáticos se pusieron a la busca y captura de los siguientes perfectos, comprendiendo muy pronto que son números muy escasos y muy difíciles de encontrar. Los siguientes perfectos son 28, 496 y 8128.
Por otra parte, no se ha encontrado ningún PERFECTO IMPAR y es posible que no exista, pero es algo que no sabemos a ciencia cierta, por eso, al decir perfecto solemos referirnos a los numeros perfectos pares. Fue, cómo no, EUCLIDES el que estudió los números perfectos exhaustivamente en el LIBRO VIII de sus Elementos. Fiel a su sagacidad, Euclides postuló que si el número anterior a una potencia de 2 es primo (por ejemplo, 7 es el anterior a la potencia $2^3=8$), entonces al multiplicarla por la potencia anterior del 2 (en este caso, $2^2=4$) obtenemos siempre un número perfecto (observa que 4x7=28 es perfecto). Otro ejemplo, $2^5=32$, 32-1=31, que es primo. Según Euclides, al multiplicar la potencia anterior de 2, $2^4=16$, por 31 se obtiene 496, ¡que también es perfecto! Dos mil años más tarde, otro genio que ya conoces, Leonard Euler, demostró que todos los números perfectos pares se obtienen de la misma forma.
En la actualidad, se conocen 39 números perfectos, la mayoría de ellos calculados con potentes ordenadores, ya que muchos de ellos ocupan cientos de páginas.



Euclides fragmento de "La Escuela de Atenas" (hacia 1510) Rafael de Sanzio (1483-1520)

$2^{n-1}(2^n-1)$ es PERFECTO si 2^n-1 es PRIMO

60

Respecto de la divisibilidad, el 60 es uno de los números más divisibles que existen: se puede dividir por 1,2,3, 4,5,6,10,12,15,20,30 y 60. ¡Nada menos que 12 divisores! Muchos más que el 100 y que otros números mayores. Por ello con gran acierto los mesopotamios lo escogieron como base para su numeración. Y para medir el tiempo.

Cuenta la leyenda que al ser preguntado qué es un amigo, Pitágoras respondió: "El que es el otro yo mismo, como son 220 y 284". Enigmática respuesta numérica como era del gusto de Pitágoras..., pero ¿qué les sucede de especial a 220 y 284? Muy sencillo, si sumas los divisores propios de 220, esto es 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110, se obtiene ¡284! Pero aún hay más, si haces lo mismo con 284 y sumas sus divisores 1 + 2 + 4 + 71 + 142 se obtiene ¡220! ¿Se puede pedir más *comunión* a dos amigos? Estos son los números AMISTOSOS más pequeños que existen.

lolitabrain@hotmail.com

René Descartes (1596 -1650)

Hasta la fecha se conocen aproximadamente 1.000 parejas de números amigos, aunque su hallazgo ha sido tarea de miles de años. Desde los pitagóricos, hubo que esperar hasta 1636 para que Pierre Fermat encontrara la siguiente pareja de amigos: **17.296** y **18.416**, algo alejados de 220 y 284. Fermat y Descartes redescubrieron una fórmula para calcular números amigos que ya era conocida por un astrónomo árabe en el siglo IX. Descartes, usando dicha fórmula, encontró a la pareja amistosa **9.363.584** y **9.437.056**. El gran Euler tuvo un *gazapo* en sus cálculos cuando construyó una tabla con 64 parejas de amigos, de los que más tarde se demostraría que una pareja era de falsos amigos. Resulta muy curioso que en 1867 un joven italiano de 16 años, desconocido científicamente, NICOLÁS PAGANINI encontró que **1.184** y **1.210** eran amigos... los siguientes a 220 y 284 y se les pasó a todos los matemáticos.

Leonard Euler (1707 -1783)

Pierre Fermat (1601 -1665)