SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS

JUNIO 2008

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Calcule los valores de a y b para que A·B=B·A.

b) (1.5 puntos) Para a=1 y b=0, resuelva la ecuación matricial $X\cdot B-A=I_2$

RESOLUCIÓN

a) Sustituyendo en la igualdad A·B=B·A

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

Operamos

$$\begin{pmatrix}12 & 2\\ 3a & 3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 3 & 12\end{pmatrix}$$

Ecuación, que tras igualar elemento a elemento, implica que

$$\begin{cases}12=3b\\ 2=2a\\ 3a=3\\ 3b=12\end{cases}$$

Obteniéndose como resultado

$$\boxed{\begin{array}{c} a=1 \\ b=4 \end{array}}$$

.

b) Sea $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

La ecuación que nos piden resolver es la siguiente:

$$X\cdot B-A=I_2$$

Despejando la X, quedaría

$$X\cdot B=I_2+A$$

$$\mathbf{X=(I_2+A)\cdot B^{-1}}$$

Calculamos los dos factores del producto al que es igual X

$$I_2+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; I_2+A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular B^{-1}, utilizamos la fórmula conocida de la matriz inversa de matrices de orden 2.

$$\text{Si } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ entonces } B^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$B^{-1}=\frac{1}{1\cdot 1-6\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasemos ya a resolver nuestra ecuación matricial:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}$$