SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS
SEPTIEMBRE 2007

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Halle la matriz A que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes: $x - 3y + 2z = 0$; $-2x + y - z = 0$; $x - 8y + 5z = 0$.

RESOLUCIÓN

a) Llamemos $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$

Debemos resolver la ecuación B·A=C, dónde la incógnita es A.

Despejamos la incógnita A, quedando por realizar la operación que aparece en el segundo miembro.

$$A = B^{-1} \cdot C$$

Para hallar B^{-1}, utilizaremos la fórmula siguiente:

$$B^{-1} = \frac{(Adj(B))^t}{|B|}$$

$(Adj(B))^t$ es la matriz adjunta traspuesta de B.
$|B|$ es el determinante de B.

Calculamos la matriz Adj(B), que es matriz cuyos elementos son los adjuntos de la matriz B. Como resultado obtenemos $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que $(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El valor del determinante de B es 13.

Entonces $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

Calculemos el valor de A:

$$A=B^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

b) Debemos clasificar el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ -2x+y-z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es un sistema homogéneo, por lo que siempre tendrá solución, es decir, será un sistema compatible.

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Procedemos al cálculo del rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada, con el objeto de utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius. Hacemos operaciones en la matriz con el objeto de convertirla en una matriz escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\begin{bmatrix} F_2+2F_1\rightarrow F_2 \\ F_3-F_1\rightarrow F_3 \end{bmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Al ser homogéneo el sistema, el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada coincide. Además, se observa que la 3ª fila es igual que la 2ª, por lo que el rango de la matriz es 2.

Al ser el rango menor que el número de incógnitas nos indica el Teorema de Rouché-

Fröbenius que el sistema es compatible indeterminado con 3-2=1 parámetros.

Pasamos la última matriz obtenida a sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ -5y+3z=0 \end{array}\right\}$$

Llamamos z=λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Despejamos y resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=-2\lambda \\ -5y=-3\lambda \end{array}\right\}$$

Se obtiene la siguiente solución para este sistema

$$\boxed{\left(\frac{-\lambda}{5}, \frac{3\lambda}{5}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$