SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS
SEPTIEMBRE 2007

OPCIÓN A

EJERCICIO 2

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2+mx+5 & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule m para que la función sea continua en x=1.

b) (1 punto) Para ese valor de m, ¿es derivable la función en x=1?

c) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x=0.

RESOLUCIÓN

a) f(x) está formada por dos trozos de funciones, una exponencial y una cuadráticas. Ambas son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

Para conseguir que las dos funciones mencionadas "conecten" bien debe ocurrir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

, es decir,

$$\lim_{x\to 1^-} 2^x=\lim_{x\to 1^+} \left(x^2+mx+5\right)$$

lo cual nos lleva a la siguiente ecuación:

$$2=1+m+5$$

por lo que

$$\boxed{m=-4}$$

b) La función quedaría así. $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si } x>1 \end{cases}$

La función derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$ sería

$$f'(x)=\begin{cases} 2^x \cdot \ln 2 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en x=1 deben ser las derivadas parciales en x=1 iguales

$$f'(1^-)=f'(1^+)$$

$$2\cdot \ln 2 \neq 2-4$$

$$\boxed{\text{La función no es derivable en x=1}}$$

c) Elegimos para hallar la tangente la función parcial situada a la izquierda de x=1.
Recordemos que la ecuación de la recta tangente es

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$$

f'(x) en un entorno de x=0 es igual a

$$f'(x)=2^x \cdot \ln 2$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente nos quedaría

$$\boxed{y-1=\ln 2\cdot(x-0)}$$