¿QUÉ ES UN GRUPO? Y II

La semana pasada nos introdujimos en el mundo del Álgebra Abstracta comenzando a estudiar una de sus más sencillas estructuras: los grupos. Para ello estudiamos el caso particular de las distintas formas de barajar tres cartas de una baraja y nos convencimos de la existencia de una operación interna entre unas formas simples de mezclar las cartas. Continuamos esta semana explorando algunas características de esta simple pero ambiciosa estructura algebraica.

por Lolita Brain

RESUMEN DE NUESTRO GRUPO

Si consideramos las seis formas simples de barajar tres cartas de una baraja, que se ilustran en la imagen, (denominadas $x_1 \ldots x_6$) y establecemos como producto de ellas la operación de aplicar una mezcla a continuación de otra, observamos que siempre obtenemos un nuevo miembro de esta colección de seis transformaciones entre cartas. Estos seis elementos son lo que denominamos un grupo.

x_1: acción de no barajar las cartas

x_2: resultado de intercambiar la primera y la segunda carta

x_3: efecto de cambiar la sota con el rey

x_4: acción de intercambiar la segunda y la tercera carta

x_5: resultado de cambiar la sota con el caballo, seguido de intercambiar aquélla con el rey

x_6: efecto de cambiar la primera con la segunda carta, seguido de intercambiar la primera con la tercera

EL GRUPO DE PERMUTACIONES

Todo conjunto de transformaciones obtenidas al permutar cartas, letras o símbolos como el ejemplo de las cartas que hemos desarrollado son casos de un grupo general denominado **grupo de permutaciones**. El número de cartas o símbolos que se permutan se denomina orden del grupo. En nuestro ejemplo, el grupo está formado por seis elementos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 que se obtienen de intercambiar tres cartas. Se dice entonces que es un grupo de orden 3.

LA TABLA DE UN GRUPO

De hecho podemos resumir todas las posibles combinaciones entre estas seis formas de barajar las tres cartas en la tabla adjunta. Es la que se denomina *Tabla de un Grupo,* que nos informa de los resultados que obtenemos al combinar cualquiera de los elementos que lo constituyen. Seguro que recuerdas la *tabla de sumar* con la que aprendiste a sumar enteros. Lo que hacías era aprender la tabla de un grupo: el de los números de contar con la suma.

si aplicamos el movimiento x_3

y después el x_4

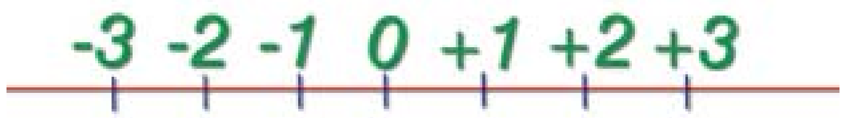
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_1	x_5	x_6	x_3	x_4
x_3	x_3	x_6	x_1	x_5	x_4	x_2
x_4	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_4	x_2	x_3	x_6	x_1
x_6	x_6	x_3	x_4	x_2	x_1	x_5

obtenemos el movimiento x_6

UN GRUPO NUMÉRICO

Existen muchos ejemplos de conjuntos con operaciones que tienen estructura de grupo, algunos de los cuales son ampliamente conocidos por todos. Entre ellos, los conjuntos de números más sencillos, los números de contar o las fracciones son grupos.

El conjunto de los **números enteros**, los números de contar y los negativos con la operación de la suma es un grupo. Su **elemento neutro** es el 0.



UN GRUPO ES ASOCIATIVO

Los grupos, además de tener una ley de composición interna, deben cumplir la propiedad asociativa. Esta propiedad obliga a que el resultado de aplicar varias transformaciones seguidas no dependa del orden en que se apliquen.

$$x_4\cdot(x_3\cdot x_2) = x_4\cdot x_6 = x_3$$

$$(x_4\cdot x_3)\cdot x_2 = x_6\cdot x_2 = x_3$$

UN GRUPO TIENE ELEMENTO NEUTRO

En todo grupo debe existir un elemento singular, llamado elemento neutro, que tiene la propiedad especial de *no hacer nada*, es decir, que operado con cualquier elemento lo deja invariante. En nuestro ejemplo de las distintas formas de barajar tres cartas, el elemento x_1 que deja igual el mazo de cartas es el neutro.

Lo más asombroso es que los nazaríes que construyeron la Alhambra y que no conocían la teoría de Fedorov realizaron mosaicos para decorar las paredes del palacio de todos los 17 grupos que, 400 años después, el ruso catalogara como los únicos posibles.

UN ÉXITO DE LA TEORÍA DE GRUPOS

En 1891, el cristalógrafo y geómetra ruso **E.S. Fedorov** enunció su famoso *Teorema de Fedorov de clasificación de grupos cristalográficos planos* en el que proporcionó una asombrosa aplicación de la teoría de grupos. En él demostró que sólo existen 17 estructuras básicas posibles para obtener mosaicos periódicos que decoren el plano. Estas decoraciones resultan de combinar cuatro movimientos simples:

Traslación. La nueva loseta que añadimos es una loseta anterior desplazada a una nueva posición sin giros de ningún tipo.

Rotación. La nueva loseta se obtiene por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo concreto.

Reflexión. Cada nueva loseta es la imagen especular de otra, con un eje de simetría dado.

Simetría con deslizamiento. Se trata de una reflexión seguida de una traslación en la dirección del eje de reflexión.

Cada uno de los 17 modos posibles recibe una denominación que procede de la cristalografía.

Infografía y textos: Lolita Brain - www.lolitabrain.com