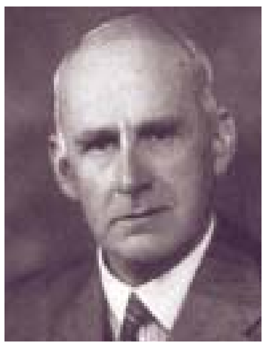
¿QUÉ ES UN GRUPO? I

Habitualmente, cuando pensamos en el Álgebra lo hacemos en relación con la resolución de ecuaciones y la manipulación de letras y números. La famosa letra *x* es la reina de esta vasta área de las matemáticas. Pero en realidad las manipulaciones algebraicas que realizamos con estas letras (*x*, *y*, *z*, etcétera) no nos causan grandes problemas porque son básicamente representaciones de números, y su manipulación es resultado de las operaciones con números. Pero existe un tipo de Álgebra denominada *abstracta* en la que los elementos que se manipulan ni tienen por qué ser números ni suelen serlo. Constituye una de las áreas más ambiciosas de la Matemática por ser aplicable a infinidad de entidades abstractas. Los **grupos** son la primera teoría surgida en ella.

por Lolita Brain

LA SUPERTEORÍA DE MATEMÁTICAS

Eddington decía a comienzos del siglo XX que para entender el misterio de lo desconocido del universo eran necesarias unas *supermatemáticas* en las que las operaciones deberían ser tan desconocidas como las cantidades sobre las que operasen. Él hablaba también de la necesidad de un *supermatemático* que no supiera lo que realmente estaba haciendo cuando realizara esas operaciones. Para él, esas *supermatemáticas* eran la **Teoría de Grupos**.



ARTHUR STANLEY EDDINGTON
1882 - 1944

¿QUÉ ES UN GRUPO?

Un **grupo** es un sistema de elementos, ya sea finito o infinito, en el que existe alguna regla que permite combinarlos, operarlos, entre sí. Además, el resultado de estas combinaciones ha de proporcionar siempre elementos del mismo conjunto. En realidad, para que tal sistema sea un grupo, se exigen dos condiciones más que exploraremos en la siguiente lámina.

LOS CREADORES DE LA TEORÍA DE GRUPOS

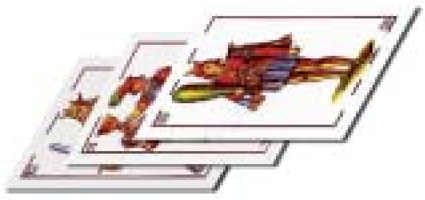
La Teoría de Grupos surgió a mediados del siglo XIX de la mano de dos creativos matemáticos: el malogrado francés Galois y el noruego Abel. Llegaron a la concepción de esta estructura estudiando la forma de resolver ecuaciones de quinto grado. De este modo, el Álgebra Abstracta nació del Álgebra Clásica.

NIELS HENRIK ABEL
1802 - 1829

EVARISTE GALOIS
1811 - 1832

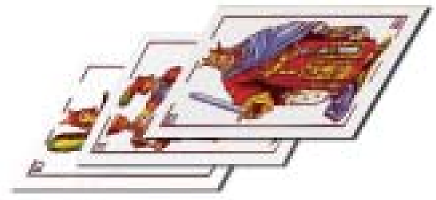
UN SENCILLO EJEMPLO

Imaginemos tres naipes, sota, caballo y rey, extraídos de una baraja. A partir de una posición de estas tres cartas podemos construir otras ordenaciones de ellas barajándolas de muchas formas. Podemos dejarlas como están, o podemos cambiar la primera con la última, o intercambiar la segunda con la tercera. Sin embargo, por complicada que sea la forma de barajar las tres cartas, todas ellas se pueden obtener por combinación de alguna de las seis manipulaciones que mostramos en el diagrama adjunto. En él se describen los resultados de realizar seis transformaciones básicas sobre la sota, el caballo y el rey. Este es un **grupo** en el que sólo hay seis elementos que llamamos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.

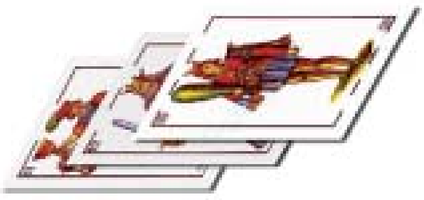


x_1: acción de no barajar las cartas

x_2: resultado de intercambiar la primera y la segunda carta



x_3: efecto de cambiar la sota con el rey



x_4: acción de intercambiar la segunda y la tercera carta

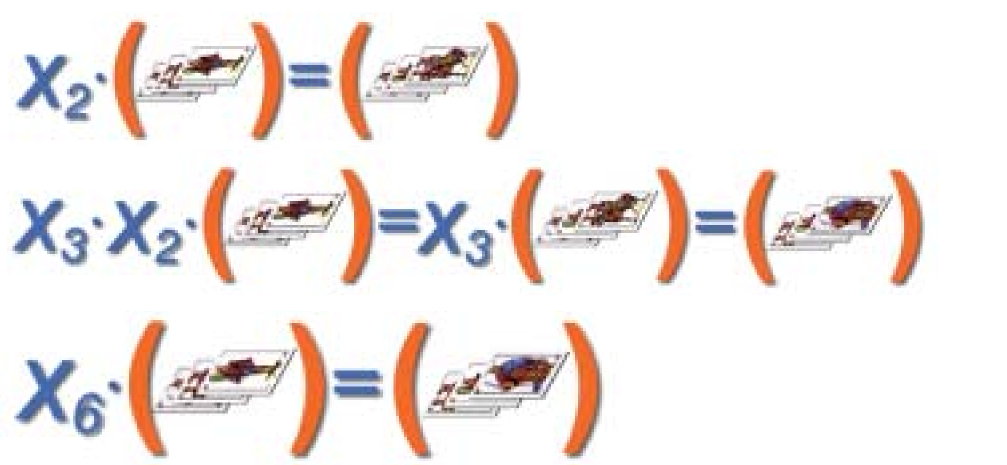
x_5: resultado de cambiar la sota con el caballo, seguido de intercambiar ésta con el rey.

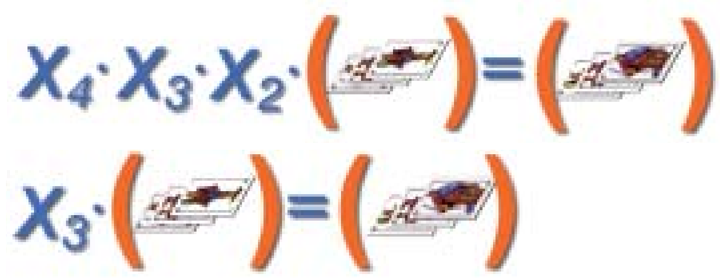
x_6: efecto de cambiar la primera con la segunda carta, seguido de intercambiar la primera con la tercera.

¿CÓMO OPERAMOS ESTAS TRANSFORMACIONES?

Veamos en primer lugar que podemos definir una manera de operar entre sí estas formas de barajar los tres naipes y que al efectuar dicha operación obtenemos alguno de los seis elementos de este grupo. *Operar* dos de estos elementos, por ejemplo x_2 con x_3, supone aplicar la transformación x_2 a una ordenación de las tres cartas y aplicar al resultado la transformación x_3. Es fácil comprobar que obtenemos el mismo resultado que aplicando únicamente la transformación x_6. Decimos entonces que:

$$\boxed{X_3 \cdot X_2 = X_6}$$





Del mismo modo podemos realizar varias transformaciones, una detrás de la otra, y así comprobaríamos que operar x_2 con x_3 y después x_4 produce el mismo resultado que aplicar directamente x_3.

$$\boxed{X_4 \cdot X_3 \cdot X_2 = X_3}$$