DIVISIBILIDAD: Soluciones

F. Bellot Rosado

Solución problema 1:

Hay tres hechos que van a ser útiles en la solución de este problema:

1) Todo número natural n se puede escribir en la forma

$$n = 2^a \cdot b, \text{con } a \geq 0, b \text{ impar.}$$

2) Todo número natural está entre dos potencias consecutivas de 2:

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

3) Si $2^k \leq n < 2^{k+1}$, ningún entero menor o igual que n, salvo 2^k, será divisible por 2^k.

Con vistas a resolver el problema, empezaremos por un caso particular, suficientemente complejo como para describir bien la situación general: $n = 12$, con $12 = 2^2 \times 3$, y $2^3 \leq 12 < 2^4$.

Entonces pongamos

$$\begin{aligned} x &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{12}= \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{7}+ \\ &\quad +\frac{1}{2^3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2^2\times 3}. \end{aligned}$$

Sea I el producto de todos los números impares menores que 12 :

$$I = 1\times 3\times 5\times 7\times 9\times 11$$

Si la igualdad que da x la multiplicamos por $2^2\times I$, obtenemos

$$x\times 2^2\times I = m+\frac{2^2\times I}{2^3}, \text{ siendo } m \text{ un cierto entero.}$$

El segundo miembro de esta igualdad, $m+\frac{I}{2}$, no es entero, luego tampoco puede serlo el primer miembro, lo que implica que x no lo es.

La generalización a cualquier n es análoga:

$$\begin{aligned} x &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, \\ 2^k &\leq n < 2^{k+1} \end{aligned}$$

y llamemos I al producto de todos los impares menores o iguales que n ; multiplicando x por $I \times 2^{k-1}$, todos los sumandos del segundo miembro son enteros excepto uno: $\frac{I \times 2^{k-1}}{2^k} = \frac{I}{2}$, entonces

$$x \times I \times 2^{k-1} = m + \frac{I}{2}$$

y el razonamiento sigue como en el caso particular.

Vuelta al enunciado del problema

Solución problema 2

Puesto que $n^2 - 1$ no es cuadrado perfecto más que para $n = 1$, parece necesario expresar el denominador de otra manera. Veamos en qué condiciones se pueden encontrar números x, y tales que

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}.$$

Elevando al cuadrado se tiene que resolver el sistema

$$\begin{cases} a = x^2 + y \\ \sqrt{b} = 2x\sqrt{y} \end{cases}$$

y, cuando se calcula $a^2 - b$ resulta

$$a^2 - b = x^4 + y^2 + 2x^2y - 4x^2y = \left(x^2 - y\right)^2,$$

lo que indica que, si $a^2 - b$ no es cuadrado perfecto, es inútil continuar. Pero si lo es, llamándole $a^2 - b = c^2$, el sistema anterior se convierte en

$$\begin{cases} a = x^2 + y \\ c = x^2 - y \end{cases}$$

así que, resolviendo éste, obtenemos

$$x = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, y = \frac{a-c}{2}.$$

Entonces resulta

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

(El caso $a-\sqrt{b}$ se trata de manera completamente similar).
Yendo al problema de la Olimpiada de Holanda, $a = n, b = n^2 - 1$, con lo que $a^2 - b = 1$, que es cuadrado perfecto. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) \end{aligned}$$

y la suma pedida es una suma telescópica :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2002}-\sqrt{2000}+\sqrt{2001}-\sqrt{1999}+\sqrt{2000}-\sqrt{1998}+\cdots\right)$$

que se reduce en definitiva a $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2002}+\sqrt{2001}-1\right)$.

Observación

Si se pretende expresar $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ como $x+\sqrt{y}$, el sistema que se obtiene es

$$\left\{\begin{array}{c} a = x^3 + 3xy \\ a^2 - b = (x-y)^3 \end{array}\right.$$

de donde sólo cabe seguir si $a^2 - b$ es cubo perfecto; en tal caso, se pone $a^2 - b = c^3$, se resuelve la ecuación $4x^3 - 3cx = a$, lo que da x, y se calcula el valor de y en $y = x^2 - c$.

Vuelta al enunciado del problema

Observaciones:

Observación 1.

No parece demasiado afortunado pedir que ”se determine” una función que queda determinada por las condiciones del enunciado (como reconoce la solución oficial, que afirma que ”el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b)”. Hubiera sido preferible, en mi opinión, pedir que se expresase $f(n)$ exclusivamente en función de n.

Observación 2.

Aunque probablemente se deba al deseo de ahorrar espacio, la primera frase de la solución oficial adolece de un defecto común cuando se redactan soluciones de problemas sin pensar en cómo exponer la solución a alumnos sin mucha experiencia, porque no sólo no da ninguna luz sobre cómo obtener la solución del problema, sino que además da a la audiencia la impresión de que ”se saca de la manga”.

Observación 3.

Una de las preguntas que hicieron los estudiantes en ese problema fué (en el Centro Cívico de Los Narejos) ”si n y s eran constantes para todo el problema”. Más allá de la posible imprecisión a la hora de formularla, en mi opinión esta pregunta obedece a que al intentar aplicar b) para ir calculando los valores de f , cuando se pretende calcular $f(3)$, se tiene que

$$3 < 2^2, \text{ pero } f(2^2 + 3) = f(3) + 1,$$

con lo que hay que descender un escalón y poner

$$3 = 2^1 + 1.$$

Pero así, la condición b) se aplica de una manera un tanto especial.

Ir a la solución

Volver al enunciado

Solución problema 3

Puesto que a) da los valores de f en las potencias de 2, no parece descabellado escribir al lado de n su expresión en el sistema binario de numeración.

Para intentar entender como actúa f, formaremos una tabla de valores relativamente amplia:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n_{(2}$	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
$f(n)$	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4

n	16	17	18	
$n_{(2}$	10000	10001	10010	etc.
$f(n)$	1	2	2	

A la vista de la tabla, conjeturamos que $f(n)$ da la suma (en base 10) de las cifras de n escrito en base 2, y trataremos de probarlo por inducción.

Si $n = 1$ o es una potencia de 2, $f(n) = 1$.

Si $n > 1$ y no es una potencia de 2, supongamos conocido $f(m)$ para todo $m < n$; entonces se puede escribir $n = 2^x + m$, tomando como 2^x

F. Bellot Rosado
Divisibilidad
Problemas
Soluciones
Página www
Página 10 de 20
Regresar
Full Screen
Cerrar
Abandonar

la mayor potencia de 2 que es *menor que n, y entonces*

$$f(n) = f(2^x + m) = f(m) + 1.$$

Una vez probada la conjetura por inducción, contestemos a las dos preguntas que plantea el problema:

En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2001 escrito en base 2 : ese número, escrito en base 2, es $1111111111_{(2}$ = 1023=$2^{10} - 1$, luego $f(n) = 10$.

En el segundo caso, un razonamiento similar demuestra que $n = 2^{2001} - 1$.

F. Bellot Rosado

Divisibilidad

Problemas

Soluciones

Página www

Página 11 de 20

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Solución oficial problema 4

Es conocido que si $p < n$ es primo, el mayor exponente α tal que p^α divide a $n!$ es

$$[n/p] + [n/p^2] + ...$$

Esta suma (finita, porque en cuanto $p^x > n$, los sumandos son nulos) es menor o igual que

$$[n/2] + [n/2^2] + ...$$

y esta suma es menor o igual que n. Por lo tanto debe ser

$$n - 1 \geq \alpha.$$

Si p divide a b, entonces se puede simplificar p del cociente.

Si p no divide a b,entonces debe dividir a uno de los factores

$$a, a + b, a + 2b, ..., a + (p - 1)\, b.$$

En total habrá al menos $[n/p]$ factores divisibles por p. Del mismo modo, habrá al menos $[n/p^2]$ factores divisibles por p^2, y así sucesivamente. En total, el producto

$$a\,(a + b)\,(a + 2b) \ldots (a + (n - 1)\, b)$$

tiene p como factor al menos α veces, y hemos terminado.

Vuelta al enunciado del problema

Solución problema 5 Podemos partir de la identidad

$$x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy\right)\left(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy\right)$$

y observar que si n es impar (el caso n par es trivial), $4^n = 4^{2k+1} = \left(\sqrt{2}\cdot 2^k\right)^4$, con lo que directamente obtenemos la descomposición del número en producto de dos factores:

$$4^n + n^4 = \left(2^n + n^2 + 2^{k+1}n\right)\left(2^n + n^2 - 2^{k+1}n\right)$$

y el menor de ellos, $2^n + n^2 - 2^{k+1}n = 2^{2k+1} + (2k+1)^2 - 2^{k+1}(2k+1) =$
$= 2\cdot 2^{2k} - 2\cdot 2^k(2k+1) + (2k+1)^2 = \left(2^k - (2k+1)\right)^2 + 2^{2k} \geq 5$
así que el producto no es primo.

Observación : según Engel, la identidad

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - (2ab)^2 \\ &= \left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right) \end{aligned}$$

recibe el nombre de identidad de Sophie Germain y es el ejemplo más *simple del caso en el que* $x^2 + y^2$ se puede factorizar : cuando 2xy es un cuadrado perfecto.

Vuelta al enunciado del problema

Solución problema 6

$$[\alpha m] = [\beta n] = q \Longrightarrow q < \alpha m < q+1, q < \beta n < q+1.$$

Esto se puede escribir en la forma

$$\frac{m}{q+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{q} \; ; \; \frac{n}{q+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{q}.$$

Sumando las dos desigualdades tenemos

$$\frac{m+n}{q+1} < 1 < \frac{m+n}{q} \Longrightarrow q < m+n < q+1,$$

pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $[\alpha m] \neq [\beta n]$ y las sucesiones son disjuntas. Veamos que su unión es todo el conjunto de los números naturales. En primer lugar, o bien α o bien β están en el intervalo $(1,2)$, porque de lo contrario, $\alpha > 2, \beta > 2 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$, contra lo supuesto.

Para razonar por reducción al absurdo, supongamos que el intervalo $(q, q+1)$ no contuviera ningún elemento de $f(n)$ ni de $g(n)$; esto querría decir que

$$
\begin{aligned}
\alpha m &< q < q+1 < \alpha\,(m+1) \\
\beta n &< q < q+1 < \beta\,(n+1)
\end{aligned}
$$

estas desigualdades equivalen a

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{q} &< \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{q+1} \\
\frac{n}{q} &< \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{q+1}
\end{aligned}
$$

y sumándolas resulta

$$
\frac{m+n}{q} < 1 < \frac{m+n+2}{q+1} \Longrightarrow m+n < q < q+1 < m+n+2
$$

y otra vez estamos ante una contradicción, porque entre $m+n$ y $m+n+2$ sólo hay ”espacio para un número natural”.$\blacksquare$

Vuelta al enunciado del problema

Solución problema 7

Supongamos que $\left[n+\sqrt{n}+1/2\right] \neq m$. ¿Qué se puede decir del entero $m \in \mathbb{N}$?

$$n+\sqrt{n}+1/2<m \quad \text{y} \quad m+1<n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2};$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &< m-n-\frac{1}{2}<\sqrt{n+1}, \\
n &< (m-n)^2-(m-n)+\frac{1}{4}<n+1, \\
n-\frac{1}{4} &< (m-n)^2-(m-n)<n+\frac{3}{4}, \\
(m-n)^2-(m-n) &= n \Longrightarrow m=(m-n)^2 .
\end{aligned}$$

Ahora hacemos un argumento de recuento: Hay exactamente k cuadrados menores o iguales que k^2+k, y hay exactamente k^2 enteros de la forma $\left[n+\sqrt{n}+1/2\right]$. Por lo tanto, $\left[n+\sqrt{n}+1/2\right]$ es el $n-$ésimo no cuadrado.

Vuelta al enunciado del problema

Vuelta a la sección de Teoría

Vuelta a la sección de Problemas