# DIVISIBILIDAD: Problemas

F. Bellot Rosado

# Problemas resueltos

## ***Problema 1***

**Un problema clásico, propuesto en la Olimpiada de Brasil:** Demostrar que, para todo $n$ natural, $n \geq 2$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

nunca es entero.

Solución

## ***Problema 2***

**Un problema de la Olimpiada holandesa:** Calcular la suma

$$S = \sum_{n=1}^{2001} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}.$$

Solución

## *Problema 3*

**Problema 6, O.M.E. 2001, Fase Final:** Determinar la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ , siendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales, que cumple, para cualesquiera $s, n \in \mathbb{N}$ , las dos condiciones siguientes:

$$\text{a) } f(1) = f(2^s) = 1, \text{ y}$$
$$\text{b) si } n < 2^s, \text{ entonces } f(2^s + n) = f(n) + 1.$$

Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.

Hallar el menor número natural $n$ tal que $f(n) = 2001$.

Observaciones

Solución (Es aconsejable ver antes las Observaciones)

## Problema 4

El siguiente ejemplo fué presentado por Bulgaria en la I.M.O. de 1985, pero no resultó elegido. Es un caso ligeramente más general de otros problemas similares.

Sean $a$ y $b$ números enteros, y $n$ un entero positivo. Demostrar que

$$\frac{b^{n-1}a\left(a+b\right)\left(a+2b\right)\ldots\left(a+\left(n-1\right)b\right)}{n!}$$

es entero.

Solución

## Problema 5

**Generalización del teorema de Sophie Germain:** Si $n > 1$, entonces $n^4 + 4^n$ no es primo.(Competición Kürschak 1978 y antes en *Mathematics Magazine 1950, propuesto por A. Makowski)*

Solución

**Siguen dos ejemplos** *"de solución automática"*

## Problema 6

**Ejemplo 1 de solución automática:** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos números irracionales tales que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Entonces las sucesiones $f(n)=[\alpha n]$ y $g(n)=[\beta n]$ son disjuntas y su unión es $\mathbb{N}$ .

Solución

## Problema 7

**Ejemplo 2 de solución automática:** La función $f(n) = [n + \sqrt{n} + 1/2]$ toma todos los valores enteros a excepción de los cuadrados perfectos.

Solución

F. Bellot Rosado

# Problemas propuestos

1. Dados $n+1$ enteros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ , todos ellos menores que $2n$, demostrar que :

i) al menos dos de ellos son primos entre sí.

ii)al menos uno de ellos es divisible por algún otro del conjunto

(P.Erdös, 1937)

2.El producto de $k$ enteros positivos, cuya suma es $N$, con $N = kp + h$, es máximo cuando $h$ de los factores son iguales a $p + 1$ y los otros $k - h$ son iguales a $p.(V.Th\acute{e}bault, 1947)$

3.Dado cualquier entero positivo $k$, existen $k$ enteros consecutivos que no son primos.

4.Demostrar que el número de divisores de

$$n = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot \cdots \cdot l^\lambda$$

es el número de términos del polinomio

$$\left(1+a+a^2+\cdots+a^{\alpha}\right)\left(1+b+\cdots+b^{\beta}\right)\cdots\left(1+l+\cdots+l^{\lambda}\right).$$

Hallar la suma y el producto de esos divisores.

5.(OME 1986)Demostrar que, cualesquiera que sean los números reales $x, y, z$ se verifica

$$\sin\left(x^3\right)+\sin\left(y^3\right)+\sin\left(z^3\right)-\sin\left(xyz\right)<4.$$

6.Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tales que : $f(xy)=f(x)+f(y)$ , $f(30)=0$ $f(x)=0$ si la cifra de las unidades de x es 7. (Olimp. de Brasil 1988)

7.Resolver la ecuación $\left[x^2-x-2\right]=[x]$

8.Probar que el conjunto de las soluciones de la ecuación

$$\left[\frac{mx-1}{2}\right]=\frac{2x+1}{5}, \quad (m\in\mathbb{Z}\text{ parámetro})$$

tiene sólo 5 elementos.

9.Los enteros positivos $a, b, c, d$ verifican $ab = cd$. Probar que el número

$$a^{1992} + b^{1992} + c^{1992} + d^{1992}$$

es compuesto (Agnis Andzans)

10. Si $a, b$ son naturales, demostrar que el número

$$M = 4^a + 4^b + 2^a + 2^b + 2^{a+b+1}$$

no puede ser cuadrado perfecto.

11.Simplificar el producto

$$P = \left(2^{2^0} + 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right)\left(2^{2^2} + 1\right)\cdots\left(2^{2^n} + 1\right)$$

(AMMonthly 1935)

12.¿En cuántos ceros termina $N!$, si $N = \frac{5^n - 1}{4}$?

13.Hallar los números reales positivos $x, y$ sabiendo que las cuatro medias

$$a = \frac{x+y}{2}, g = \sqrt{xy}, h = \frac{2xy}{x+y}, k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

son números naturales cuya suma vale 66 (Olimp. Checa)

14. Sean $n, k$ primos entre sí. Demostrar que

$$\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{2n}{k}\right] + \cdots + \left[\frac{(k-1)\,n}{k}\right] = \frac{(n-1)\,(k-1)}{2}$$

15.Hallar la parte entera de

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

16. (IMO 92,#1,Nueva Zelanda) Hallar todas las ternas $(p, q, r)$ de enteros tales que $1 < p < q < r$ y de modo que $(p-1)\,(q-1)\,(r-1)$ divida a $pqr - 1$.

17.Determinar los enteros positivos $x, y, z, v, t$ tales que

$$2^x 3^y 5^{2+z} 7^v = t!$$

18. ¿Es siempre posible convertir un entero en primo, modificando una sola de sus cifras? (W.Sierpinski)

19.Sea $a_1 a_2 \cdots a_n$ una permutación de $1, 2, \cdots, n$. Demostrar que, si $n$ es impar, entonces el producto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

es par. (Eötvös Competition 1906)

20. Sea $b$ un entero fijo, $m = 1, 2, 3, \ldots$ y $q$ un irracional $0 < q < 1$. Diremos que el intervalo $(m, m+1)$ es un salto si no contiene un múltiplo de $b + q$.

Probar que todo conjunto de $b$ saltos sucesivos contiene exactamente un múltiplo de $1 + \frac{b}{q}$. (AMMonthly 1949)

Ir a la sección de soluciones