LAS TORRES DE HANOI Y EL MANDATO DE BRAHMA

Luis Balbuena Castellano (*)

1. INTRODUCCIÓN

Las Torres de Hanoi es un juego inventado por el creativo matemático francés E. Lucas vendiéndose como juguete en 1883. El material del juego lo forman tres pivotes (alineados o no), en los que se sitúan un cierto número de aros o discos de distintos diámetros que se colocan en uno de los pivotes extremos en orden decreciente de abajo para arriba, es decir, que en la parte baja se coloca el de mayor diámetro y encima los de diámetros menores en orden decreciente como se ve en la figura 1.

Figura 1

El objetivo del juego consiste en pasar los discos de un extremo al otro pero no de cualquier forma sino siguiendo unas precisas y sencillas normas que son las que dictó Brahma y que reproducimos a continuación.

Y es que como la imaginación humana no tiene límites, este juego se transformó en leyenda, una de cuyas versiones es la que dice que cuando Brahma terminó su obra, construyó un enorme monasterio en Benarés, en uno de los patios interiores instaló tres agujas de oro alineadas colocando en una de las agujas extremas 64 discos de distintos diámetros tal y como se ha indicado anteriormente. Pues bien, la leyenda continúa diciendo que Brahma reunió a sus monjes y les dijo que a partir de ese momento deberían trabajar incesantemente para llevar los discos situados en una aguja extrema a la aguja del otro extremo. Pero no podrían hacerlo de cualquier forma sino que tendrían que respetar las siguientes normas:

- En cada movimiento solo podrán llevar un disco.
- El trabajo hay que hacerlo en el menor número de movimientos posibles.
- No se puede colocar nunca un disco mayor sobre otro menor.

La leyenda concluye con esta sentencia de Brahma: "Cuando paséis el último disco, vendré con todo mi poder para llevaros al Nirvana eterno donde no existirá ni el dolor ni la ignorancia. Después, la tierra desaparecerá".

(*) Catedrático de Matemáticas, IES Viera y Clavijo, La Laguna, Tenerife).

Este final nos plantea dos problemas de trascendental importancia, a saber:

a) ¿Cuántos movimientos han de hacer los monjes de Benarés para cumplir con el mandato de Brahma?

b) ¿Cuándo será, por tanto, el fin del mundo?

Estos serán los objetivos que pretendo cubrir pero lo haré haciendo un recorrido por interesantes aspectos del juego.

2. TORRES DE HANOI Y COMBINATORIA

Llamaré posición de los discos a cualquier colocación de los mismos que respete la ley de no situar ningún disco mayor sobre otro menor. Paso a estudiar las posiciones en función del número de discos que se utilicen.

Un disco

Solo hay tres posiciones posibles.

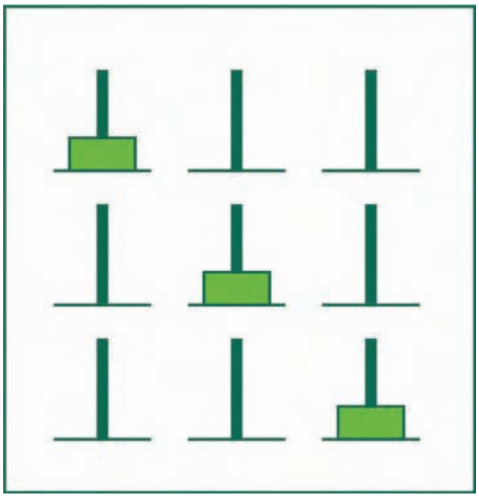

Figura 2

Denomino A, B y C a los tres pivotes de izquierda a derecha y con esto, las tres posiciones de la figura 2 se pueden esquematizar de la siguiente forma:

Discos:	1
Posiciones:	A
	B
	C

Otra notación que se puede utilizar se basa en lo siguiente: se identifica cada pivote con las letras A, B y C y cada disco con los números 1, 2, 3, … correspondiendo el 1 al disco de menor diámetro. Pues bien, si se coloca un subíndice a la letra que identifica el pivote tendremos una forma de señalar la posición. Como en este caso solo hay un disco, según ese criterio las posiciones quedan identificadas así:

$$A_1$$
$$B_1$$
$$C_1$$

Si hay más discos, en esta segunda notación, A_i significa que el disco i está en el pivote A, B_j quiere decir que el disco j está en el pivote central B y C_k nos dice que el disco k está en el pivote C que es el de la derecha.

Dos discos

En este caso tengo los discos 1 y 2 y las posiciones de los discos en los pivotes son las que están dibujadas en la figura 3.

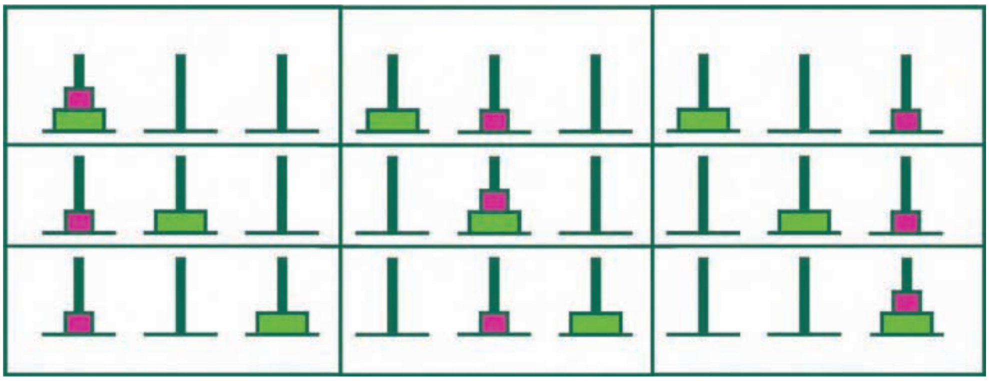

Figura 3

Teniendo en cuanta las dos notaciones explicadas, esas nueve posiciones quedan esquematizadas de las siguientes formas:

a)	Discos:	2	1
	Posiciones:	A	A
		A	B
		A	C
		B	A
		B	B
		B	C
		C	A
		C	B
		C	C

El número de posiciones se ve claramente que son las variaciones con repetición (VR) de los elementos A, B y C que se pueden repetir hasta tres veces, es decir:

$$VR3{,}2 = 3^2 = 9$$

Utilizando la otra notación, el esquema de las nueve posiciones es este:

Discos:	2	1	
Posiciones:	A_2	A_1	(Significa que los dos discos están en el pivote de la izquierda)
	A_2	B_1	(El disco mayor está en A y el menor en B)
	A_2	C_1	(El disco mayor está en A y el menor en C)

A_1	B_2
B_2	B
B_2	C_1
A_1	C_2
B_1	C_2
C_2	C_1

Tres discos

En este caso hay 3x3x3 = 27 posiciones diferentes. No hago los dibujos pero el lector puede entretenerse en estudiar alguna de las posiciones y hacer el dibujo que le corresponde. Es una forma de afianzar lo que se está haciendo.

Con las dos notaciones que estoy utilizando el esquema de las 27 posiciones es el siguiente:

Discos 3 2 1

Posiciones en las dos notaciones:

A	A	A		A_3	A_2	A_1
A	A	B		A_3	A_2	B_1
A	A	C		A_3	A_2	C_1
A	B	A		A_3	A_1	B_2
A	B	B		A_3	B_2	B_1
A	B	C		A_3	B_2	C_1
A	C	A		A_3	A_1	C_2
A	C	B		A_3	B_1	C_2
A	C	C		A_3	C_2	C_1
B	A	A		A_2	A_1	B_3
B	A	B		A_2	B_3	B_1
B	A	C		A_2	B_3	C_1
B	B	A		A_1	B_3	B_2
B	B	B		B_3	B_2	B_1
B	B	C		B_3	B_2	C_1
B	C	A		A_1	B_3	C_2
B	C	B		B_1	B_1	C_2
B	C	C		B_1	C_2	C_1
C	A	A		A_2	A_1	C_3
C	A	B		A_2	B_1	C_3
C	A	C		A_2	C_3	C_1
C	B	A		A_1	B_2	C_3
C	B	B		B_2	B_1	C_3
C	B	C		B_2	C_3	C_1
C	C	A		A_1	C_3	C_2
C	C	B		B_1	C_3	C_2
C	C	C		C_3	C_2	C_1

Cuatro discos

El número total de posiciones es VR3,4 = 81

Ejercicio:

Dibujar las siguientes posiciones dadas en las dos notaciones utilizadas:

a. CBBA
b. BBAC
c. CCCA
d. A_2 A_1 B_3 C_4
e. A_2 B_4 B_3 C_1
f. A_4 A_2 B_3 C_1

N discos

Se llega a la conclusión de que en el caso de disponer de n discos, el número total de posiciones es

$$3^n$$

de forma que si se añade un nuevo disco, el número anterior queda multiplicado por 3, es decir que el número de posiciones es

$$3^{n+1}$$

3. LAS TORRES DE HANOI Y LOS GRAFOS

Ayudado por la teoría de grafos voy a dar un enfoque al estudio que permitirá, entre otras cosas, simplificarlo gracias a la visualización de las situaciones. Aparecerán aspectos de gran riqueza didáctica por cuanto suponen de investigación y de posibilidades para crear y recrear.

Algunas definiciones:

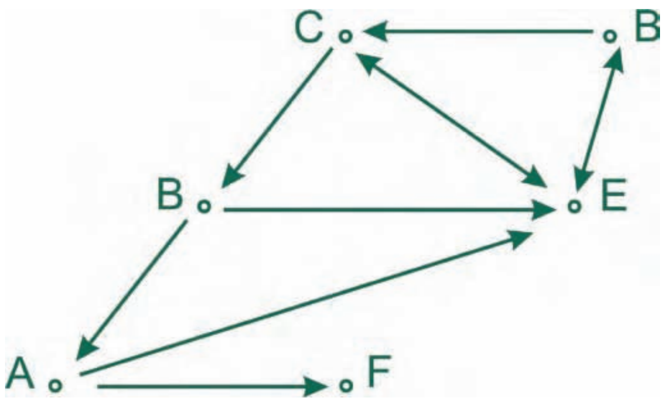

Figura 4

Se llama *grafo* a un conjunto de puntos que se unen entre sí mediante líneas (figura 4) y siguiendo unas reglas que se fijarán en cada caso. Los puntos se denominan *vértices* del grafo y las líneas *aristas* que pueden estar o no orientadas.

Se dice que un vértice es *par* si en él incide un número par de aristas. En el otro caso se dice que es *impar*.

Según esas definiciones, en el grafo de la figura 4, los vértices C y E son pares.

Considero el caso en el que se ha colocado un solo disco. Las tres posiciones posibles son las de la figura 2. Pues bien, las identifico con la sencilla notación siguiente:

1,0,0 0,1,0 0,0,1

Con ellas construyo un grafo considerando como vértice a cada una de las tres posiciones. Entre un vértice y otro existirá una arista si se puede pasar de la primera posición a la otra. En estas condiciones el grafo queda establecido así:

$$\begin{array}{ccc} & 1,0,0 & \\ \nearrow\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\nwarrow \\ 0,1,0 & \longleftrightarrow & 0,0,1 \end{array}$$

Como se observa, las aristas son bidireccionales porque se puede pasar indistintamente de una posición a otra.

Veamos ahora cómo es el grafo correspondiente a las nueve posiciones obtenidas con dos discos dibujadas en la figura 3.

Con la notación anterior, se puede observar cómo se puede pasar de la posición $\begin{matrix}1\\2,0,0\end{matrix}$ a la posición 2,0,1 porque lo que se hace es pasar con un solo movimiento el disco pequeño (1) del pivote de la izquierda al de la derecha. Sin embargo, no es posible pasar con un solo movimiento de la posición $\begin{matrix}1\\2,0,0\end{matrix}$ a la posición 0,2,1

Con esas consideraciones, el grafo correspondiente a las nueve posiciones de los dos discos queda de la siguiente forma:

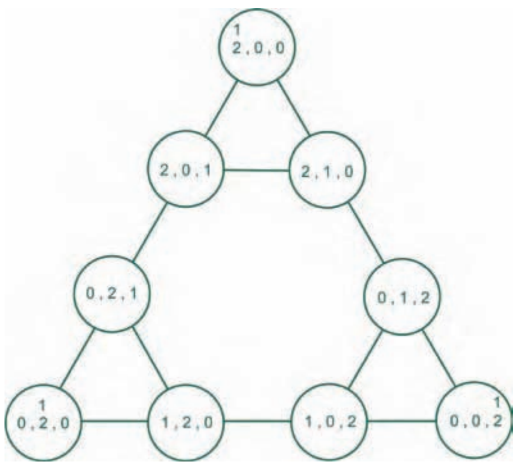

Figura 5

Si se consideran tres discos, entonces el grafo toma la forma de la figura 6:

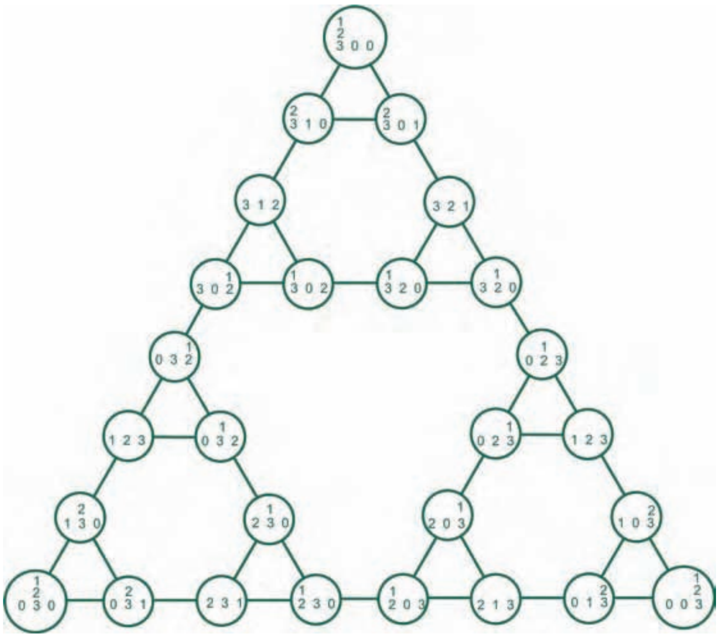

Figura 6

Reduciendo los vértices a un punto, para cuatro discos el grafo es:

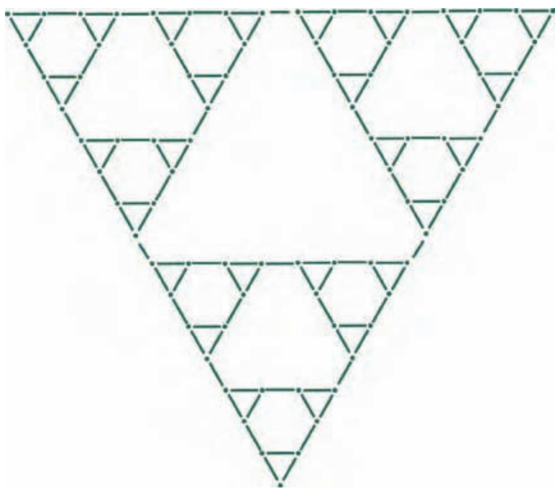

Figura 7

4. EL MANDATO DE BRAHMA. SECUENCIA DE MOVIMIENTOS

Parto de la hipótesis de que los monjes de Benarés encargados de pasar los discos del pivote de la izquierda al de la derecha lo quieren hacer con el menor número de movimientos posibles. Los grafos construidos van a ayudar a resolver la situación.

En efecto, tal y como está planteado el problema y fijándose en los grafos construidos, se verá que para cumplir el mandato, basta con ir del vértice superior del grafo al vértice inferior derecho. Es lo que llamaré "la ruta de los monjes". Entonces, si solo hay un disco, la "ruta" se hace con un solo movimiento: figura 8.

un disco

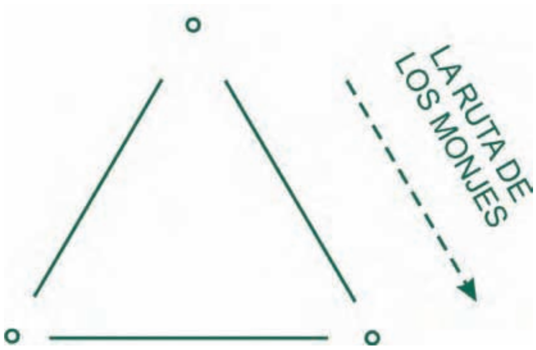

Figura 8

Si son dos discos, la "ruta" tiene 3 movimientos: figura 9

dos discos

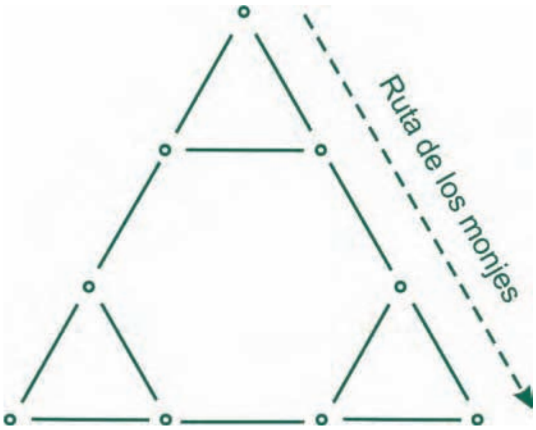

Figura 9

Con tres discos, la "ruta" tiene 7 movimientos: figura 10

tres discos

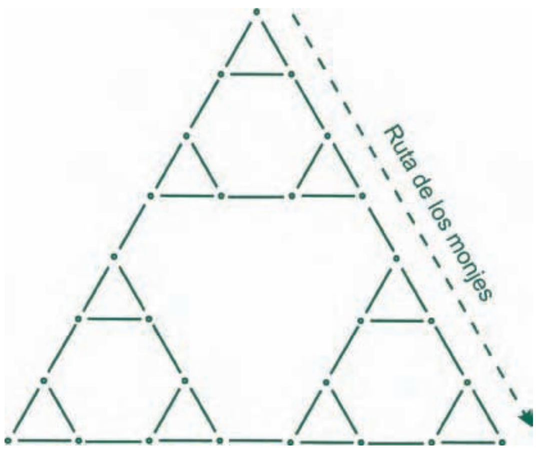

Figura 10

Se deduce que el número de movimientos necesarios para hacer la ruta con n discos es igual a

$$2^n - 1$$

Teniendo en cuenta que Brahma colocó 64 discos, el número de movimientos por la "ruta de los monjes" es igual a

$$2^{64} - 1$$

Hecha la operación resulta la siguiente cantidad de movimientos:

18.446.744.073.709.551.615

Ya podemos tratar de dar respuesta a la inquietante pregunta: ¿Cuánto tiempo tardarán los monjes en cumplir el mandato de Brahma?

Hay que hacer alguna hipótesis sobre el tiempo que tarda un monje en hacer un movimiento. Pongamos que un segundo. En este caso, hechas las cuentas resultan

584.942.417.352 años

Es decir, que si los monjes no se equivocaran ninguna vez tardarían más de medio billón de años!! Podemos estar tranquilos por ahora.

5. ALGORITMO PARA CUMPLIR MEJOR EL MANDATO DE BRAHMA

Los grafos construidos con todos los movimientos posibles, van a permitir encontrar un sencillo algoritmo para saber la secuencia de los movimientos mínimos, es decir, los movimientos de la "ruta de los monjes" para cumplir por tanto el mandato de Brahma en el menor tiempo posible.

En el grafo correspondiente a los dos discos de la figura 5 se ve que el disco 2 pasa al pivote tercero en el segundo movimiento, que es el que ocupa el lugar central de los tres que hay que hacer. En consecuencia la secuencia de movimientos es:

Movimiento	1º	2º	3º
Disco que se mueve	1	2	1

Si fijamos la atención en el grafo de la figura 6 (tres discos), en la "ruta de los monjes el mayor disco, que es el 3, se mueve una sola vez en el movimiento cuarto, mientras que el disco 2 se mueve en el segundo y sexto. En los demás solo se mueve el disco 1. Por lo tanto, la secuencia de movimientos queda fijada en el siguiente cuadro:

Movimiento	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Disco que se mueve	1	2	1	3	1	2	1

Atendiendo a lo deducido, se puede construir el algoritmo correspondiente a la secuencia de la "ruta de los monjes" para cuatro discos. Es esta:

Mov	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º	15º
Disc	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

Ejercicio: Construir la secuencia de movimientos correspondiente a la "ruta de los monjes" con cinco discos.

6. PROPUESTAS DIDÁCTICAS. SUGERENCIAS. JUEGOS

- Las torres de Hanoi se pueden improvisar de una manera sencilla pues las piezas no tienen por qué ser necesariamente discos. Pueden ser, por ejemplo, cuadrados cuyos lados sean de diferentes dimensiones. Para los pivotes basta con marcar tres puntos alineados en una hoja o en cualquier superficie.
- Es un juego que da bastante "juego" en las exposiciones de las Semanas matemáticas. Se dice a un alumnos que pase los discos (tres, cuatro,…) de un lugar al otro y que cuente los movimientos que hace. Con cuatro discos, por ejemplo, no es fácil que el alumno siga la "ruta de los monjes" y por eso lo hace en más de 15 movimientos. Pedirle que lo repita y que trate de hacerlo en menos movimientos.
- Hay una situación curiosa que consiste en poner como punto de partida los discos repartidos por los pivotes y pedir que se pasen a la derecha en el menor número de movimientos. Por ejemplo, partir de la posición

  3 1 2

  para llegar a la posición final

  1
  2
  0 0 3

- Una regla más. Además de las ya conocidas, se añade otra: no se puede pasar un disco de un extremo a otro. Por ejemplo, no se puede hacer el siguiente movimiento:

  1
  3 0 2

  1
  3 0 2

  porque como puede observarse se ha pasado el disco pequeño del pivote de la izquierda al de la derecha.

  En estas condiciones: ¿Cómo y con cuántos movimientos se llega de la posición inicial a la final?

- ¿Existe alguna ruta que permita pasar una y sólo una vez por todas las posiciones de un grafo?
- Una situación para investigar: añadir un pivote más y estudiar los movimientos con un número de discos creciendo y partiendo de uno.
- Un juego para dos.

  Material necesario: una cartulina con dos tableros como en de la figura 11.

  Dos lotes de ocho discos de distintos diámetros o cuadrados de lados de distinto tamaño.

  Objetivo: Se elige el número de discos con los que jugar. Pasar los discos de la casilla de salida, en la que se colocarán como en las torres de Hanoi, a la casilla de meta donde deben quedar en el mismo orden.

  Reglas:

  1. Los jugadores juegan de forma alternativa.

Figura 11

2. En cada movimiento sólo se puede desplazar un disco.
3. Los discos se pueden colocar en un casilla vacía o encima de un disco de mayor tamaño.
4. No se puede colocar un disco mayor sobre otro menor.
5. No se puede pasar de la casilla de salida a la de meta.
6. Los discos han de colocarse en la meta también en orden decreciente.

Dominó de Hanoi

El grafo correspondiente a las posiciones de los tres discos muestra cómo se puede construir una ruta que pase por todos los vértices una y solo una vez (figura 12). Si construimos una ficha con cada una de las posiciones, entonces podemos ponerlas una tras otra manteniendo sólo el criterio de que se puedan adosar si de la posición señalada en la última ficha se puede pasar a la que se coloque al lado en un solo movimiento.

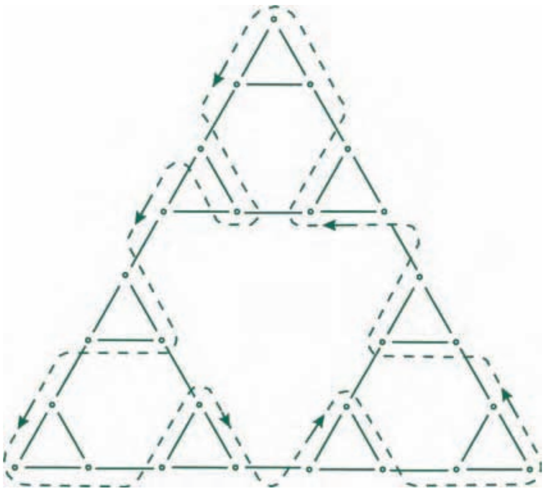

Figura 12

Además, la ruta se puede empezar en cualquier vértice.

Esta circunstancia permite realizar un juego de dominó cuyas bases son:

- Se sortea quién empieza el juego.
- Cada jugador toma cinco fichas.
- Para iniciar el juego es necesario colocar alguna de las fichas en la que los tres discos estén en el mismo pivote (figura 13).

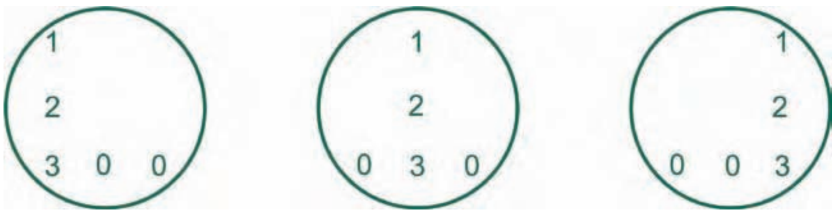

Figura 13

- Si el jugador que ha de empezar la partida no tiene ninguna de esas tres fichas, entonces toma una ficha de la mesa y pasa el turno al otro jugador. Si éste tampoco tiene una de las fichas de partida, toma una ficha de la mesa y se continúa hasta que sea posible empezar.
- El juego lo gana el primer jugados que coloque todas sus fichas o, en el caso de bloquearse, quien tenga el menor número de fichas.
- Una interesante variante consiste en añadir una o dos fichas "comodín".

Salto de la rana de Hanoi

Material:

Un tablero como el que indica la figura 14.

Figura 14

Dos lotes de cinco discos de distintos tamaños (o cuadrados de tamaños de lado diferente). Los lotes se hacen de distinto color.

Objetivo:

Un jugador coloca sus discos en un extremo y el otro en el extremo opuesto. El juego consiste en pasar las fichas de un extremo al otro respetando las siguientes reglas.

Reglas:

- Los discos se colocan en orden decreciente con el mayor debajo.
- Los jugadores mueven ficha alternativamente.
- Un disco se puede mover bien hacia una casilla vacía o colocándose encima de un disco mayor sea propio o del otro jugador.
- Un disco colocado en un extremo ya no se puede mover más.