

NÚMEROS - PROBLEMAS

1.- EL QUINCE.

Se colocan nueve fichas en una mesa, numeradas del 1 al 9. Dos jugadores van cogiendo alternativamente una ficha de la mesa. El ganador es el primero que consiga tener tres fichas que sumen 15. Si tú jugases primero, ¿qué número elegirías? Analiza el juego.

2.- DISECCION DE UN CUADRADO.

Se dice que un número N es "agradable" si un cuadrado se puede dividir en N cuadrados que no se solapan. ¿Cuáles son los números agradables?

3.- LA CONJETURA DE GOLDBACH

Una conjetura es una afirmación que parece razonable pero cuya veracidad no ha sido demostrada.

En matemáticas hay todavía muchas conjeturas sin demostrar. Una de las más famosas es la de **Goldbach**, que dice:

"Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos".

Pon algunos ejemplos.

4. SUMANDOS CONSECUTIVOS

La expresión $5N$, ¿qué números representan?

La expresión $(N-2)+(N-1)+N+(N+1)+(N+2)$ es la suma de cinco números consecutivos.

Pues bien, ambas expresiones son iguales. Compruébalo en varios casos concretos y, luego, verifícalo algebraicamente.

Escribe la igualdad que corresponda para $3N$. Desarrolla algunos ejemplos.

Generaliza el problema y escribe con claridad los resultados a los que hayas llegado.

5.- BROMAS EN UN HOTEL DE BROMA.

A un hotel de infinitas habitaciones, acuden excursiones de turistas ininterrumpidamente. Cuando llega la primera excursión, las luces de las habitaciones están todas encendidas.

El primer turista, gasta una broma y apaga las luces de todas las habitaciones. A continuación, el segundo turista acciona los interruptores de las habitaciones pares. El tercero, acciona los de las habitaciones 3, 6, 9, 12,.... El siguiente acciona los de las habitaciones 4, 8, 12, ... El siguiente, los de las 5, 10, 15,

Y así, indefinidamente.

Después del tercer turista, ¿qué habitaciones se han quedado apagadas? ¿Y al final?

6.- EL ALMACÉN

En un almacén puedes conseguir un descuento del 20%, pero al mismo tiempo, tienes que pagar unos impuestos del 15%. ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

7.- PORCENTAJES.

¿Qué es mayor, el 7% de 60 o el 60% de 7?

¿Pasa siempre, la relación que hayas encontrado, con cualquier porcentaje y cantidad con las características anteriores?

¿Qué prefieres apostar: 1 contra 100, 10 contra 1.000, 1.000 contra 100.000 o un millón contra 10^8 ?

8.- VA DE CEROS

El producto de los diez primeros números naturales acaba ¿en un cero o en dos?, ¿por qué?

¿En cuántos ceros acaba el producto de los 100 primeros números naturales?

¿Y el de los mil primeros números naturales?

9.- NÚMEROS CAPICUAS

A los números como el 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11. ¿Es cierto?

10.- POTENCIAS DE 7

¿En qué cifra acaba el número 7^{53} ?

11.- CUATRO NÚMEROS PRIMOS.

Busca cuatro dígitos A, B, C y D, para que los números de cuatro cifras representados por ADDD, AACA, BCDB y BDAC sean números primos.

(Te recuerdo que un número es divisible por 2 si acaba en 0 o cifra par. Lo es por 5 cuando acaba en 0 o 5. Es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es divisible por 3 también. Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan lugar par y la de los que ocupan lugar impar, es 0 o múltiplo de once).

12.- LA LEY DE BODE

¿Sabes cuál es la distancia media, en Km., de la Tierra al Sol? Consúltalo.

La distancia media que separa a la Tierra del Sol se suele tomar como unidad de medida en el cálculo de distancias en el sistema solar. Se denomina unidad astronómica (U.A.).

El astrónomo alemán Johann E. Bode publicó en 1778 una ley que permitía calcular las distancias medias aproximadas de los planetas, entonces conocidos, al Sol:

$$\begin{array}{ll} d=0,4 & \text{si } n=1 \text{ (Mercurio)} \\ d=0,4+0,3 \times 2^{n-2} & \text{si } n>1 \text{ (demás planetas)} \end{array}$$

Completa la tabla:

n	Planeta	Distancia (U.A.)
1	Mercurio	0,4
2	Venus	
3	Tierra	1,0
4	Marte	
5	?	2,8
6	Júpiter	
7	Saturno	

En 1801, se descubrió Ceres (n=5), que confirmaba la citada ley.

Las distancias de los restantes planetas al Sol, en U.A. son: Urano (descubierto en 1781), 19,2; Neptuno (1846), 30,1 y Plutón (1915), 39,5.

Estos planetas, ¿siguen verificando la ley de Bode?

13.- DISTANCIAS PLANETARIAS

Utilizando los cálculos obtenidos con la ley de Bode, ¿cuál es la distancia, en Km., de Venus al Sol? ¿Y de Neptuno al Sol?

La Tierra se dice que está en oposición a Marte, cuando ambos planetas están alineados con el Sol, estando éste en medio. Cuando está en medio la Tierra decimos que están en conjunción.

¿Cuál es la distancia, en Km. entre ambos planetas cuando están en oposición? ¿Y cuando están en conjunción?

Una distancia más aproximada de Mercurio al Sol es de 0,39 U.A. ¿Cuántos Km. de diferencia supone respecto del cálculo hecho con el valor obtenido en la tabla del problema sobre la Ley de Bode?

La Luna está a 385.000 Km. de la Tierra; ¿a cuánto equivale esta distancia en U.A.?

14.- PRIMOS

No es fácil encontrar una decena de números consecutivos sin primos. He aquí una de esas decenas:

$531 = 3^2 \times 59$	$536 =$
$532 = 2^2 \times 7 \times 19$	$537 =$
$533 =$	$538 = 2 \times 269$
$534 = 2 \times 3 \times 89$	$539 = 7^2 \times 11$
$535 =$	$540 =$

Descompón en factores primos los números que faltan.

¿Cuál es el máximo común divisor de 532 y 539 ?

¿Cuál el mínimo común múltiplo de 531 y 540?

¿Cuál es el m.c.d. y el m.c.m. de 538 y 269?

El número 534 tiene como divisores primos a los números 2, 3 y 89. Pero tiene más divisores; por ejemplo el 6.

¿Podrías indicar algún divisor más del número 534?

¿Cuáles son todos los divisores del número 539?

Sin decir cuáles, ¿sabrías decir cuántos son los divisores del número 540?

(Por cierto, si encuentras otra de esas decenas, dímelo, por favor).

15.- POLINOMIOS QUE GENERAN NUMEROS PRIMOS

El polinomio $X^2 + X + 27$ da números primos para valores de X comprendidos entre 0 y 1. Compruébalo.

Descompón en factores, el valor del polinomio para $X=17$.

16.- ERRATAS DE IMPRESIÓN

Un tipógrafo, en lugar de componer $N = a^c b^a$, compuso $N = \underline{acba}$. Sin embargo, en este caso daba igual, pues era el mismo número. ¿Quién es N ?

17.- ¿ES POSIBLE?

¿Es posible esta multiplicación: TWO x TWO = THREE ?

18.- NÚMERO DE DIVISORES.

Para obtener y contar los divisores de un número, se suelen utilizar dos modelos: uno **en árbol** y otro **reticular**.

Pongamos un ejemplo con $45 = 5 \times 3^2$.

Modelo **en árbol**:

Exponentes para el 5	Exponentes para el 3	
	0	$1 = 5^0 \times 3^0$
0	1	$3 = 5^0 \times 3^1$
	2	$9 = 5^0 \times 3^2$
	0	$5 = 5^1 \times 3^0$
1	1	$15 = 5^1 \times 3^1$
	2	$45 = 5^1 \times 3^2$

Modelo **reticular**:

	5	15	45
	1	3	9

¿Desarrolla los modelos correspondientes para cada uno de los números: 8, 36 y 450 ?
Practica con otros números.

¿Qué ventajas y qué inconvenientes tienen cada uno de los modelos indicados?

¿Sabrías generalizar los resultados anteriores y decir cómo puede obtenerse el número de divisores de un número cualquiera?.

19.- ESTRELLAS

En el Universo hay 10.000.000.000.000.000.000 (es decir, diez mil trillones de estrellas), según Isaac Asimov.

Un número como el anterior, escrito de esa manera, no sólo ocupa mucho espacio, sino que es difícil de leer.

Para hacer más manejable esos números, se utiliza en matemáticas la notación **exponencial**. En esta notación, el número de estrellas se escribe: 10^{22} o también: 1×10^{22} . Otro ejemplo: 400.000.000 se escribe: 4×10^8 (se lee: "cuatro por diez elevado a ocho").

Expresa en notación exponencial:

A) tres mil millones; B) 100; C) cuarenta mil billones. D) cincuenta y siete mil millones.

Efectúa en tu calculadora: $3.000.000 \times 200.000$

Observa cómo expresa el resultado. Efectúa otros cálculos análogos.

Intenta escribir en la pantalla de tu calculadora el número de estrellas (tendrás que utilizar obligatoriamente la notación exponencial; para ello, hay una tecla que suele llamarse EXP).

20.- LA EDAD DEL UNIVERSO.

Se estima actualmente la edad del Universo en unos quince mil millones de años.

Expresa este número en tu calculadora utilizando la tecla EXP. Si a continuación pulsas la tecla =, aparecerá en pantalla el número expresado así: $1,5 \times 10^{10}$, en vez de 15×10^9 .

Para los números grandes y pequeños, la calculadora suele utilizar la notación **científica** (que consiste en tomar siempre como parte entera **una** cifra significativa -es decir, distinta de cero-).

Expresa en notación científica (sin calculadora) los siguientes números:

a) la milésima parte de la edad del universo; b) 456000; c) 432,12; d) $3,28 \times 62$.

En la notación científica, ¿qué significado tiene el exponente?.

Efectúa con tu calculadora:

a) $10^{12} \times 340.000$; b) $321,32 \times 43.547.389$, c) $(3,1 \times 10^{42}) : (3,5 \times 10^3)$

21.- LAS DOS ESTRELLAS MAS CERCANAS.

La estrella más próxima a nosotros, después del Sol, es la **Alfa Centauro**, que está a 'sólo' 4,27 años-luz de nosotros.

La siguiente más cercana es la conocida como **estrella de Barnard**, que está a 5,86 años luz.

Queremos saber a cuántos kilómetros están las dos estrellas más cercanas.

(¿Sabes a qué equivale 'un año luz'? es la distancia que recorre la luz en un año. Se considera, a estos efectos, la velocidad de la luz igual a 300.000 km./seg; y el año de 360

22.- SUMA Y PRODUCTO (I).

Las siguientes igualdades son ciertas:

$$2 + 2 = 2 * 2$$

$$3 + \frac{3}{2} = 3 * \frac{3}{2}$$

$$4 + \frac{4}{3} = 4 * \frac{4}{3}$$

- Siguiendo el modelo, escribe algunas igualdades más y comprueba que son ciertas.
- Expresa verbalmente las igualdades observadas.
- Expresa algebraicamente las igualdades observadas y comprueba que la igualdad es siempre cierta.
- ¿Cuándo ocurrirá que la suma de dos números es igual a su producto?.

23.- SUMA Y PRODUCTO (II).

Las siguientes igualdades son ciertas:

$$2^2 * \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

$$3^2 * \frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$$

$$4^2 * \frac{4}{15} = 4 + \frac{4}{15}$$

- Siguiendo el modelo, escribe algunas igualdades más y comprueba que son ciertas.
- Expresa verbalmente las igualdades observadas.
- Expresa algebraicamente las igualdades observadas y comprueba que la igualdad es siempre cierta.

24.- OPERACIONES SENCILLAS (I).

Observa y comprueba:

$$7^2 = 49$$

$$67^2 = 4489$$

$$667^2 = 444889$$

- Siguiendo el modelo, escribe algunas igualdades más y comprueba que son ciertas.
- ¿Cuánto valdrá 6666667^2 ? Escribe el resultado siguiendo el modelo y, después, comprueba que es cierto el resultado.

25.- OPERACIONES SENCILLAS (II).

Observa y comprueba:

$$4^2 = 16$$

$$34^2 = 1156$$

$$334^2 = 111556$$

a) Siguiendo el modelo, escribe algunas igualdades más y comprueba que son ciertas.

b) ¿Cuánto valdrá 3333334^2 ? Escribe el resultado siguiendo el modelo y, después, comprueba que es cierto el resultado.

26.- SUMAS CONSECUTIVAS.

Observa las siguientes igualdades, que vamos a llamar "filas":

Fila 1: $1 + 2 = 3$

Fila 2: $4 + 5 + 6 = 7 + 8$

Fila 3: $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

Escribe las filas 4 y 5.

¿Te atreverías a escribir la fila n ?

27.- SUMANDO CUADRADOS DE NUMEROS CONSECUTIVOS.

Observa las siguientes igualdades, que vamos a llamar "filas":

Fila 1: $3^2 + 4^2 = 5^2$

Fila 2: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Fila 3: $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

Sabrías escribir la fila 4.

¿Te atreves con la fila 5?

Si has escrito la fila 5, casi seguro que puedes escribir la fila n . ¡Inténtalo!

28.- LA EDAD.

María y Alfredo son de la misma edad. Pepe es mayor que Luisa, quien a su vez es mayor que Carmen. Juan Carlos, aunque es mayor que Carmen, es más joven que Pepe y Luisa. Alfredo es más joven que Paco el amigo de Juan Carlos. Ordena estas personas según sus edades.

29.- MEDIA VIDA

Caminando por su ciudad un profesor de matemáticas se dio cuenta de que llevaba trabajando un cuarto de su vida. Se preguntó cuánto tiempo pasaría para llevar trabajando un tercio de su vida. Ayúdale.

30.- FALTAN SIGNOS.

Escribe los signos de las operaciones y los paréntesis necesarios para que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 = 3$$

$$4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 = 4$$

$$5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 = 3$$

$$1 \ 2 \ 3 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 = 100$$

¿Es única la solución en todos los casos?